MATHEMATISCH INSTITUUT, FACULTEIT WISKUNDE EN INFORMATICA, UU.
IN ELEKTRONISCHE VORM BESCHIKBAAR GEMAAKT DOOR DE TBC VAN A−Eskwadraat.
HET COLLEGE WISB112 WERD IN 2003/2004 GEGEVEN DOOR ERIK VAN DEN BAN.

Inleiding Analyse (WISB112)
29 juni 2004

- Als je een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, **ga dan toch door met de volgende onderdelen.** Je mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- Alle 4 opgaven tellen even zwaar.

Opgave 1

We beschouwen de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x, y) = x(y^2 - (x + 1)^2)$$

a) Schets de nulniveauverzameling van f en geef aan waar f positief respectievelijk negatief is. Arceer tevens de verzameling V bestaande uit de punten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ met $x \leq 0$ en $|y| \leq x + 1$ (in dit onderdeel worden geen bewijzen verlangd).

b) Bewijs dat de verzameling V gesloten en begrensd is.

c) Geef het inwendige V^{inw} van de verzameling V (hier wordt geen bewijs verlangd).

d) Bepaal alle stationaire punten van f op $\mathbb{R}^2$. Toon aan dat precies één van deze stationaire punten in V^{inw} gelegen is.

e) Toon aan dat f op V in precies één punt een maximum aanneemt en bepaal dat maximum. **Opmerking:** Hierbij mag alleen gebruik gemaakt worden van de theorie die in de cursus Inleiding Analyse behandeld is.

Opgave 2

We beschouwen de functie $f : [\,0, \infty\,[\,\to [\,0, \infty\,[$ gedefinieerd door

$$f(x) = xe^x$$

a) Toon dat de functie f differentieerbaar is en bepaal zijn afgeleide.

b) Toon aan dat de functie f injectief is.

c) Bewijs dat de functie f surjectief is, d.w.z. $f([\,0, \infty\,[\,) = [\,0, \infty\,[$.

De functie f is derhalve bijectief en heeft een inverse $g : [\,0, \infty\,[\,\to [\,0, \infty\,[$.

d) Toon aan dat g differentieerbaar is en dat voor alle $y \in [\,0, \infty\,[$ geldt: $0 < g'(y) \leq 1$. Toon aan dat er precies één $y_0 \in [\,0, \infty\,[$ bestaat zo dat $g'(y_0) = 1$.

Opgave 3

We beschouwen een monotoon stijgende functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Gegeven zijn $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$.

a) Toon aan dat er een $M > 0$ bestaat zo dat $|f(x)| \leq M$ voor alle $x \in [a, b]$.

b) Zij $n \in \mathbb{Z},\ n \geq 1$. We beschouwen de verdeling $V = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ van $[a, b]$ gegeven door $x_j = a + j(b-a)/n$, voor $j = 0, \ldots n$. Toon aan dat

$$\overline{S}(f, V) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_j) \quad \text{en} \quad \overline{S}(f, V) - \underline{S}(f, V) = \frac{b-a}{n}\, [f(b) - f(a)].$$

c) Bewijs dat de functie f Riemann-integreerbaar is over $[a, b]$.

We beschouwen nu de functie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

d) Toon aan dat voor alle $x, y \in \mathbb{R}$ met $x \leq y$ geldt

$$(y-x)f(x) \leq F(y) - F(x) \leq (y-x)f(y).$$

e) Bewijs dat de functie F continu is op $\mathbb{R}$.

Opgave 4

Laat $n \in \mathbb{Z}$, $(n \geq 1)$, en beschouw de gesloten eenheidsbol in $\mathbb{R}^n$ en de gesloten bol minus de oorsprong,

$$A := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\} \quad \text{en} \quad A_0 := A \setminus \{0\}$$

Gegeven is een functie $f : A_0 \to \mathbb{R}$ die uniform continu is op A_0.

a) Formuleer de definitie van uniforme continuïteit voor de functie f.

b) Toon aan dat er voor elke $\epsilon' > 0$ een $\delta' > 0$ bestaat zo dat voor alle $x, y \in B(0; \delta') \cap A_0$ geldt $|f(x) - f(y)| < \epsilon'$.

c) Toon aan dat er een $\delta'' > 0$ bestaat zo dat f begrensd is op $B(0; \delta'') \cap A_0$.

d) Toon aan dat f begrensd is op A_0.

We beschouwen een willekeurige rij $(a_n)_{n\geq 1}$ in A_0 met $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

e) Toon aan dat voor een geschikte rij $n_1 < n_2 < \ldots$ van indices de limiet

$$\lim_{k\to\infty} f(a_{n_k})$$

bestaat. We noemen de limiet b.

f) Bewijs dat

$$\lim_{x\to 0} f(x) = b.$$