DEPARTEMENT WISKUNDE, FACULTEIT BÈTAWETENSCHAPPEN, UU.
IN ELEKTRONISCHE VORM BESCHIKBAAR GEMAAKT DOOR DE $\mathcal{BC}$ VAN A–ESKWADRAAT.
HET COLLEGE WISB112 WERD IN 2005/2006 GEGEVEN DOOR ERIK VAN DEN BAN.

Inleiding Analyse, tweede deeltentamen (WISB112)
6 juli 2006

- Geef niet alleen antwoorden; laat ook zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent.
- **N.B.** Als je een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- **N.B.** Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, **ga dan toch door met de volgende onderdelen.** Je mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- Rekenmachine, diktaat en aantekeningen mogen niet worden gebruikt.
- Alle vier opgaven tellen even zwaar.

Succes !

Opgave 1. We beschouwen de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x, y) = y(x^2 - (y - 1)^2).$$

(a) Schets de nulniveauverzameling van f en geef aan waar f positief respectievelijk negatief is. Arceer tevens de verzameling V bestaande uit de punten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ met $y \geq 0$ en $|x| \leq 1 - y$ (in dit onderdeel worden geen bewijzen verlangd).

In het vervolg mag je zonder bewijs gebruiken dat de verzameling V gesloten en begrensd is.

(b) Geef het inwendige V^{inw} van de verzameling V (hier wordt geen bewijs verlangd).

(c) Bepaal alle stationaire punten van f op $\mathbb{R}^2$. Toon aan dat precies één van deze stationaire punten in V^{inw} gelegen is.

(d) Toon aan dat f op V in precies één punt een minimum aanneemt en bepaal dat minimum.

Opgave 2. Gegeven is een monotoon strikt dalende functie $f : [0, \infty[\to [0, \infty[$.

(a) Toon aan dat de verzameling $f([0, \infty[)$ een infimum heeft. We noemen dit infimum L.

(b) Toon aan dat L niet tot $f([0, \infty[)$ behoort.

(c) Toon aan dat voor iedere $\epsilon > 0$ een $x \in [0, \infty[$ bestaat zo dat $L < f(x) < L + \epsilon$.

In het vervolg veronderstellen we dat f bovendien continu is.

(d) Bewijs dat $f([0, \infty[) = \,]\, L, f(0)]$. Hint: bewijs twee inclusies.

Opgave 3. Zij $n \geq 1$ een positief geheel getal. Gegeven is een $(n + 1)$ keer differentieerbare functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ waarvan de $(n + 1)$-ste afgeleide begrensd is op $\mathbb{R}$. Laat $p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ het n-de orde Taylor polynoom van f rond 0 zijn.

(a) Geef formules voor de coëfficiënten c_k, voor $0 \leq k \leq n$, in termen van de afgeleiden van f in 0.

Zij voorts $r(x) = f(x) - p(x)$.

(b) Laat zien dat er een $\delta > 0$ bestaat zo dat

$$0 < |x| < \delta \quad \Rightarrow \quad \frac{|r(x)|}{|x|^n} \leq \frac{1}{2}.$$

In het vervolg veronderstellen we dat $p(x) = x^n$.

(c) Veronderstel dat n even is. Toon aan dat $f(x) \geq \frac{1}{2}x^n$ voor $|x| < \delta$.

(d) Toon aan dat f een lokaal minimum in $x = 0$ heeft.

Opgave 4. We beschouwen een differentieerbare functie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ met $|f'(x)| \leq M$ voor alle $x \in [0,1]$. We beschouwen de verdeling V van $[0,1]$ bestaande uit de punten $\frac{j}{n}$ met $j = 0, \ldots, n$. Hierbij is n een positief geheel getal. Het j-de deelinterval bij deze verdeling noteren we met $I_j = [\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}]$, voor $1 \leq j \leq n$.

(a) Toon aan dat voor elke $1 \leq j \leq n$ en voor alle $x \in I_j$ geldt

$$\left| f(x) - f\left(\frac{j}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{n}.$$

(b) Toon aan dat

$$\inf_{I_j} f \geq f\left(\frac{j}{n}\right) - \frac{M}{n}.$$

Je mag in het vervolg zonder bewijs gebruiken dat

$$\sup_{I_j} f \leq f\left(\frac{j}{n}\right) + \frac{M}{n}.$$

(c) Toon aan dat

$$\overline{S}(f,V) - \underline{S}(f,V) \leq \frac{2M}{n}.$$

(d) Bewijs dat

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right) - \int_0^1 f(x)\, dx \right| \leq \frac{2M}{n}.$$