MATHEMATISCH INSTITUUT, FACULTEIT WISKUNDE EN INFORMATICA, UU.
IN ELEKTRONISCHE VORM BESCHIKBAAR GEMAAKT DOOR DE $\mathcal{TBC}$ VAN A−Eskwadraat.
HET COLLEGE WISB112 WERD IN 2004/2005 GEGEVEN DOOR E.P. VAN DEN BAN.

Inleiding Analyse, deel 2 (WISB112)
4 juli 2005

- Geef niet alleen antwoorden; laat ook zien hoe u aan die antwoorden gekomen bent.
- **N.B.** Als u een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeldt dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- **N.B.** Als u een onderdeel van een opgave niet kunt maken, **ga dan toch door met de volgende onderdelen.** U mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- Rekenmachine, diktaat en aantekeningen mogen niet worden gebruikt.

Opgave 1

We beschouwen de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x, y) = (x^2 - y^2 - 1)(y^2 - 1).$$

a) Teken de nulniveauverzameling van f. Geef bovendien aan waar f positief dan wel negatief is. *(2 punten)*

b) Bewijs dat de verzameling $V := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \le 1,\ x^2 \le y^2 + 1\}$ begrensd is. *(1 punten)*

c) Geef het inwendige $\mathrm{inw}(V)$ van de verzameling V. Hier wordt geen bewijs verlangd. In het vervolg mag u zonder bewijs gebruiken dat de verzameling V gesloten is. *(1 punten)*

d) Laat zien dat f precies 5 stationaire punten heeft waarvan er precies één in $\mathrm{inw}(V)$ ligt. Het stationaire punt dat in $\mathrm{inw}(V)$ ligt noteren we met a. *(3 punten)*

e) Toon aan dat f in a een lokaal extremum heeft. Bepaal tevens de aard van dat extremum. *(3 punten)*

Opgave 2

We beschouwen het interval $I =]-1, 1[$ en de functie $f : I \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}.$$

a) Bewijs dat de functie f strikt monotoon stijgend is. *(2 punten)*

b) Bewijs dat voor elke $R > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zo dat $x \in I,\ x > 1 - \delta \Rightarrow f(x) > R$. *(2 punten)*

c) Bewijs dat f een bijectie is van I op $\mathbb{R}$. *(3 punten)*

De inverse van f noteren we met $g : \mathbb{R} \to I$.

d) Bewijs dat de functie g differentieerbaar is en dat voor alle $y \in \mathbb{R}$ geldt $0 < g'(y) \le \frac{1}{2}$. *(3 punten)*

Opgave 3

Gegeven is een open interval $I = \,]\, a - r, a + r\, [$. Gegeven is voorts een $(n+1)$-keer differentieerbare functie $f : I \to \mathbb{R}$. We veronderstellen dat de $(n+1)$-ste orde afgeleide $f^{(n+1)}$ begrensd is op I, dat wil zeggen, er bestaat een constante $M > 0$ zo dat $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ voor alle $x \in I$.

a) Zij $n \geq 1$. Zij $p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k$ het n-de orde Taylor polynoom van de functie f in het punt a. Geef formules voor de coëfficiënten c_k. *(2 punten)*

b) Zij $R(x) = f(x) - p(x)$ de bijbehorende restterm. Bewijs dat er een constante $C > 0$ bestaat zo dat voor alle $x \in I$ geldt:

$$|R(x)| \leq C|x-a|^{n+1}.\textit{(4 punten)}$$

c) Bewijs: als $f^{(k)}(a) = 0$ voor alle $0 \leq k < n$, dan geldt

$$\lim_{x \to a} n!\,(x-a)^{-n} f(x) = f^{(n)}(a).$$

(4 punten)

Opgave 4

Zij $s > 1$. We beschouwen de functie $f : x \mapsto x^{-s}$, $]\,0, \infty\,[\to \mathbb{R}$. We beschouwen voorts het interval $I = [1, N]$, met $N \geq 2$ een geheel getal.

a) Laat zien dat de functie f Riemann-integreerbaar is op het interval I en dat

$$\int_1^N f(x)\, dx = \frac{1 - N^{1-s}}{s-1}.$$

(2 punten)

b) Toon aan dat er een verdeling V van het interval I bestaat zo dat

$$\underline{S}(f, V) = \sum_{k=2}^{N} k^{-s}.$$

(2 punten)

c) Geef een soortgelijke formule voor de bovensom $\overline{S}(f, V)$ bij de gevonden verdeling V. *(1 punten)*

d) Toon aan dat $\overline{S}(f, V) - \underline{S}(f, V) \leq 1$. *(2 punten)*

e) Toon aan dat

$$\frac{1 - N^{1-s}}{s-1} - 1 \leq \sum_{k=2}^{N} k^{-s} \leq \frac{1 - N^{1-s}}{s-1}.$$

(3 punten)

$\Big[$*Commentaar van de TBC:* in de TEX-file van de docent werden door ons nog twee deelopgaven aangetroffen, die niet in het tentamen zaten. Deze opgaven vind je hieronder.$\Big]$

In het vervolg veronderstellen we dat er een constante $C > 0$ bestaat zo dat de functie f voldoet aan de schatting

$$|f(x)| \leq C|x-a|^{n+1}, \qquad (x \in I).$$

f) Toon aan dat

$$\lim_{x \to 0} (x-a)^{-n} p(x) = 0.$$

(Hierbij is p het in (b) genoemde Taylor polynoom).

g) Bewijs dat $p = 0$. Hint: Toon achtereenvolgens aan dat de coëfficiënten $c_0, \ldots, c_n$ nul zijn.