Eerste deeltentamen Lineaire Algebra A

9 november 2010, 13u30-16u30

- Bij dit tentamen mag het dictaat niet gebruikt worden.
- Schrijf op elk vel je naam, studnr en naam practicumleider (David Carchedi, Bart van den Dries, Jeroen Sijsling, Wouter Stekelenburg of Jan Jitse Venselaar).
- Laat bij elke opgave zien hoe je aan je antwoord komt!!
- Veel succes!

1. Gegeven is de matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 4 & \alpha \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

waarin $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) (1 pt) Voor welke waarde(n) van α geldt dat $\text{rang}(A_\alpha) = 3$?

(b) (1 pt) Bepaal de inverse van A_0 (dus met $\alpha = 0$).

(c) (1/2 pt) Zij $\mathbf{b} = (2, \beta, 1)^t$ met $\beta \in \mathbb{R}$. Kies nu $\alpha = -2$. Voor welke waarde(n) van β heeft het stelsel $A_{-2}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ oneindig veel oplossingen?

2. Gegeven zijn twee lijnen l, m door de parametervoorstellingen

$$l : \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad m : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

en het vlak V door de vergelijking $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$.

(a) (1/2 pt) Zijn de lijnen l, m wel of niet evenwijdig?

(b) (1/2 pt) Bepaal een vector die loodrecht op de richting van l en de normaal van V staat.

(c) (1/2 pt) Bepaal een vergelijking van het vlak dat l bevat en loodrecht op V staat.

(d) (1 pt) Bepaal een parametervoorstelling van de rechte lijn loodrecht op V die zowel l als m snijdt.

Z.O.Z.

3. Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) (1/2 punt) Bepaal de rang van A

(b) (1/2 punt) Bepaal de rang van de nulruimte van A.

(c) (1/2 punt) Bepaal een 4×2-matrix B, niet de nulmatrix, zó dat $AB = O$ (waarin O de nulmatrix is).

(d) (1 punt) Zij nu C een $m \times k$-matrix en D een $k \times n$-matrix zó dat $CD = O$. Bewijs dat

$$\text{rang}(C) + \text{rang}(D) \leq k$$

4. Zij $U \subset \mathbb{R}^4$ de deelruimte gegeven door de vergelijking $x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0$ en V de deelruimte van $\mathbb{R}^4$ opgespannen door de vectoren

$$(1, 2, 0, 1)^t, (-1, 0, 3, 2)^t, (1, 0, 0, 0)^t$$

(a) (1 punt) Bepaal de dimensie van U en van V.

(b) (1 punt) Bepaal de dimensie en een basis van $U \cap V$. (Hint: vul de coördinaten van de vectoren van V in de vergelijking voor U in).

(c) (1/2 punt) Zij $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$ een tweetal onafhankelijke vectoren en zij W de deelruimte opgespannen door $\mathbf{a}, \mathbf{b}$. Bewijs dat $U \cap W$ een niet-triviale vector bevat.

UITWERKINGEN

1. Gegeven is de matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 4 & \alpha \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

waarin $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) We berekenen de rang door rijreductie op A_α. Vegen met eerste rij geeft

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & \alpha \\ 0 & -2 & 1 - \alpha/2 \\ 0 & -3 & 1 - \alpha \end{pmatrix}$$

Vegen met tweede rij

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & \alpha \\ 0 & -2 & 1-\alpha/2 \\ 0 & 0 & -1/2-\alpha/4 \end{pmatrix}$$

Er zijn drie pivots als $\alpha \neq -2$, dus $\mathrm{rang}(A) = 3$ als $\alpha \neq -2$.

(b)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Vegen met eerste rij,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Vegen met tweede rij,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1/4 & -3/2 & 1 \end{array}\right)$$

Vegen met derde rij,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1/4 & -3/2 & 1 \end{array}\right)$$

Vegen met tweede rij,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -1 & -4 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1/4 & -3/2 & 1 \end{array}\right)$$

Rijen met scalair vermenigvuldigen,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

De inverse van A_0 wordt dus

$$\begin{pmatrix} -1/2 & -3 & 2 \\ 1/2 & 3/2 & -1 \\ 1/2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

(c) Los op,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & \beta \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Vegen met eerste rij,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & \beta-1 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

Vegen met tweede rij,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & \beta-1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2-3\beta/2 \end{array}\right)$$

Als $\beta \neq 1/3$ dan is het stelsel strijdig, als $\beta = 1/3$ dan zijn er oneindig veel oplossingen.

2. Gegeven zijn twee lijnen l, m door de parametervoorstellingen

$$l: \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad m: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

en het vlak V door de vergelijking $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$.

(a) De richtingsvectoren $(2, -1, -1)^t$ en $(0, 1, 2)^t$ zijn onafhankelijk, de lijnen zijn dus niet evenwijdig.

(b) Noem de gevraagde vector $(n_1, n_2, n_3)^t$. Loodrecht op de richting van l betekent $2n_1 - n_2 - n_3 = 0$. Loodrecht op de normaal van V impliceert $3n_1+2n_2+n_3 = 0$. Oplossing van beide vergelijkingen geeft bijvoorbeeld $(n_1, n_2, n_3) = (1, -5, 7)$.

(c) De normaal van het gevraagde vlak staat loodrecht op de normaal van V en de richting van l. Een dergelijke vector is in voorgaande opgave uitgerekend. De vergelijking is dus van de vorm $x_1 - 5x_2 + 7x_3 = c$. Verder moet dit vlak daadwerkelijk een punt van l bevatten, bijvoorbeeld de steunvector $(-3, 1, 3)$. Invullen geeft $c = -3-5\cdot 1+7\cdot 3 = 13$. De vergelijking wordt dus $x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 13$.

(d) Eerste methode: Neem het vlak uit voorgaande opgave en snijdt deze met m. De punten van m worden gegeven door $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2 + \mu, -2 + 2\mu)$. Invullen in vlak:

$$13 = (1 - 5 \cdot (2 + \mu) + 7 \cdot (-2 + 2\mu) = -23 + 9\mu.$$

Hieruit volgt $\mu = 4$. Het snijpunt is dus $(1, 6, 6)^t$. De gevraagde lijn is de lijn door dit punt en loodrecht op V (maw richtingvector is $(3, 2, 1)^t$). Antwoord: $(1, 6, 6)^t + \lambda(3, 2, 1)^t$.

Tweede methode: Kies een punt P op l en een punt Q op m zó dat de verschilvector $\vec{PQ}$ een veelvoud van de normaalvector van V is. De lijn door P met als richting de normaal op V is de gevraagde lijn.

Dus,

$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Oplossing van dit stelsel vergelijkingen geeft $\lambda = -1, \mu = 4, \nu = -2$. Het punt P is dus $(-5, 2, 4)^t$ en de parametervoorstelling $(-5, 2, 4)^t + \lambda(3, 2, 1)^t$.

3. Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Pas rijreductie toe op A. Vegen met eerste rij geeft

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vegen met tweede rij,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Er zijn twee pivots. Dus $\text{rang}(A) = 2$.

(b) Geef de nulruimte van A aan met $nul(A)$. Er geldt dat $\text{rang}(nul(A)) = 4 - \text{rang}(A) = 4 - 2 = 2$.

Je kunt ook gewoon de nulruimte uitrekenen en vervolgens constateren dat de rang gelijk is aan 2.

(c) Voor de kolommen van B kunnen we de twee basisvectoren van de nulruimte van A nemen.

Het kan nog iets eenvoudiger, kies een vector $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ uit de nulruimte van A en kies voor B de matrix met eerste en tweede kolom gelijk aan $\mathbf{v}$.

(d) De kolommen van de matrix D zitten in de nulruimte van C. De rang van D is dus kleiner of gelijk aan de rang van de nulruimte van C en die is gelijk aan $k - \text{rang}(C)$. Dus $\text{rang}(D) \leq k - \text{rang}(C)$, waaruit het gevraagde volgt.

4. Zij $U \subset \mathbb{R}^4$ de deelruimte gegeven door de vergelijking $x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0$ en V de deelruimte van $\mathbb{R}^4$ opgespannen door de vectoren

$$(1, 2, 0, 1)^t, (-1, 0, 3, 2)^t, (1, 0, 0, 0)^t$$

(a) Een basis van U wordt gegeven door $(2, 1, 0, 0), (-3, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)$ en de dimensie is dus gelijk aan 3. De vectoren die V opspannen zijn onafhankelijk (op de gebruikelijke manier na te gaan) en de dimensie van V is dus ook 3, de gegeven vectoren vormen een basis van V.

(b) Hoewel dit niet nodig is voor de oplossing van de opgave, kunnen we wel opmerken dat volgens de theorie

$$\dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V) = 4$$

waaruit volgt, omdat $\dim(U) = \dim(V) = 3$, dat $\dim(U \cap V)) = 2$.

Een vector uit V heeft de vorm

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \mu + \nu \\ 2\lambda \\ 3\mu \\ \lambda + 2\mu \end{pmatrix}$$

Invullen in de vergelijking van U geeft

$$0 = (\lambda - \mu + \nu) - 2 \cdot (2\lambda) + 3 \cdot (3\mu) - (\lambda + 2\mu) = -4\lambda + 6\mu + \nu.$$

Een basis van oplossingen van de stelsel wordt gegeven door $(\lambda, \mu, \nu) = (1, 0, 4), (0, 1, -6)$. Dit komt overeen met de vectoren $(6, 2, 0, 1)^t, (-7, 0, 3, 2)^t$ uit V. Deze vormen een basis van $U \cap V$.

(c) Zij $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$ een tweetal onafhankelijke vectoren en zij W de deelruimte opgespannen door $\mathbf{a}, \mathbf{b}$. Er geldt dus $\dim(W) = 2$.

Eerste methode: Er geldt dat $\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - 4 = 2 + 3 - 4 = 1 > 0$. Met andere woorden, $U \cap W$ bevat een niet-triviale vector.

Tweede methode: De ruimte W wordt gegeven door de vectoren $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$. Vullen we dit in de vergelijking voor U is dan krijgen we één homogene vergelijking in twee onbekenden. Deze heeft altijd een niet-trivial oplossing λ_0, μ_0. De bijbehorende vector $\lambda_0\mathbf{a} + \mu_0\mathbf{b}$ is niet-triviaal omdat $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ onafhankelijk zijn.