**Tentamen Lineaire Algebra**
**donderdag 29 januari 2015, 9.00-12.00 uur**

- Het is niet toegestaan telefoons, computers, grafische rekenmachines (wel een gewone), dictaten, boeken of aantekeningen te gebruiken.
- Schrijf op elk vel je naam, studentnummer en groepnummer (Groep 1: João Mestre, Julius Linssen, Richard Schoonhoven; groep 2: Dana Balibanu, Matthijs Lip, Steyn van Leeuwen; groep 3 Jan van Zweeden, Menno de Boer; groep 4: Thom Klaasse, Jetze Zoethout; groep 5: Tom Bannink, Lois van der Meijden.
- Alle opgaven tellen even zwaar, 10 punten per opgave. Er is een bonusopgave (opgave 6, maximaal 5 punten) waarmee je het cijfer van het tentamen op kunt halen. Het cijfer van je tentamen is het behaalde aantal punten gedeeld door 5, met dien verstande dat het tentamencijfer nooit hoger kan zijn dan een 10.
- Geef niet alleen antwoorden, maar bewijs al je beweringen.

*SUCCES!*

1. In $\mathbb{R}^4$ geven we het punt $P = (1, 2, 2, 1)^t$ en de lineaire deelruimte $W$ die gegeven wordt door $2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0$.
(a) (4 punten) Bepaal de afstand tussen $P$ en $W$.
(b) (6 punten) Geef een orthonormale basis van $W$.

**Uitwerking:** (a) We vullen de lijn door $P$ loodrecht op $W$, d.w.z. $(1, 2, 2, 1)^t + \lambda(2, 1, 1, 3)^t$, in in de vergelijking van $W$, dit geeft voor $\lambda = -\frac{3}{5}$ het snijpunt. De afstand tussen $P$ en $W$ is dus de lengte van de vector $-\frac{3}{5}(2, 1, 1, 3)^t$. Dit is $\frac{3}{5}\sqrt{15}$.
(b) We kiezen de vectoren $(1, -2, 0, 0)^t$, $(0, 0, -3, 1)^t$ die staan loodrecht op elkaar en de vector $(2, 1, a, 3a)^t$ die loodrecht op deze twee vectoren staat. De eerste twee liggen in $W$, D de laatste moet nu ook in $W$ liggen, dus aan de vergelijking van $W$ voldoen. Dit geeft $a = -\frac{1}{2}$. Ofwel we kunnen de derde vector kiezen $(4, 2, -1, -3)^t$. Nu nog Orthonormaal maken (lengte 1 geven):

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2, 0, 0)^t, \quad \frac{1}{\sqrt{10}}(0, 0, -3, 1)^t, \quad \frac{1}{\sqrt{30}}(4, 2, -1, -3)^t.$$

2. Laat $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ de lineaire afbeelding zijn die t.o.v. de standaard bases de volgende matrix heeft:

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 9 & -2 \\ 6 & 5 & 1 & 12 \\ 3 & 4 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

(a) (4 punten) Bepaal Ker($A$). Wat is de dimensie van Ker($A$)?
(b) (2 punten) Bepaal met behulp van een stelling de dimensie van $A(\mathbb{R}^4)$.
(c) (4 punten) Bepaal een basis van $A(\mathbb{R}^4)$ en toon aan dat je antwoord van onderdeel (b) inderdaad klopt.

**Uitwerking:** Vegen geeft bijvoorbeeld

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) De kern wordt voortgebracht door de vectoren $(-3,1,1,1)^t$ en $(-4,5,-1,0)^t$. Dus de kern is tweedimensionaal .
(b) we gebruiken de stelling Ker$(A)$+dim $A(\mathbb{R}^4) = 4$, dus de dimensie van $A(\mathbb{R}^4)$ is 2.
(c) Na vegen staan de pivots in de eerste en tweede kolom, dus de eerste twee kolommen van de oorspronkelijke matrix, $(4,6,3)^t$ en $(5,5,4)^t$, (die duidelijk lineair onafhankelijk zijn,) vormen een basis van $A(\mathbb{R}^4)$.

3. (a) (2 punten) Toon aan dat $(1,0,-1)^t$ een eigenvector is van

$$G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) (8 punten) Bepaal de andere eigenwaarden en eigenvectoren van $G$.

**Uitwerking:** (a) Duidelijk: Matrix laten werken op deze vector, dit geeft $2\times$ deze vector terug. Dus is de vector een eigenvector bij eigenwaarde 2.
(b) we berekenen:

$$0 = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-(2+\sqrt{2}))(\lambda-(2-\sqrt{2}))\,.$$

Dus andere eigenwaarden zijn $\lambda = 2 \mp \sqrt{2}$. Dus eigenvectoren voor $\lambda = 2 \mp \sqrt{2}$ voldoen aan

$$\begin{pmatrix} \pm\sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & \pm\sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & \pm\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dit geeft $(1, \pm\sqrt{2}, 1)^t$ als andere twee eigenvectoren.

4. Zij $V = \mathbb{R}[x]$ de vectorruimte van polynomen in $x$ met de gebruikelijke optelling en scalaire vermenigvuldiging.
(a) (2 punten) Toon aan dat $W = \{f(x) \in V \mid f(0) = f(1) = 0\}$ een lineaire deelruimte is van $V$.
(b) (2 punten) Zij $B : V \to W$ die gegeven wordt door $B(f(x)) = (x^2 - x)f'(x)$. Toon aan dat $B$ een lineaire afbeelding is.
(c) (2 punten) Is $B$ injectief? Is $B$ surjectief?
(d) (2 punten) Laat $U = W \cap \mathbb{R}[x]_5$ (waarbij $\mathbb{R}[x]_5$ is de deelruimte van $V$ is die bestaat uit polynomen van graad kleiner of gelijk aan 5). Bepaal een geordende

basis $C$ van $U$.
(e) (2 punten) Zij $\mathbf{e}_i = x^i$ en $E = \{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ een geordende basis van $\mathbb{R}[x]_4$. Laat $A : \mathbb{R}[x]_4 \to U$ die ook wordt gegeven door $A(f(x)) = (x^2 - x)f'(x)$. Bepaal de matrix $A_C^E$ van $A$ ten opzichte van de bases $E$ en $C$.

**Uitwerking:** (a) Laat $f(x), g(x) \in W$ en $\lambda \in \mathbb{R}$, dan hebben we voor $a = 0$ of $= 1$, dat

$$(f+g)(a) = f(a)+g(a) = 0+0 = 0, \text{ dus } f(x)+g(x) \in W; \quad (\lambda f)(a) = \lambda(f(a)) = \lambda \cdot 0 = 0,$$

dus $(\lambda g)(x) \in W$. Tenslotte, merk op dat de functie die constant 0 is ook in $W$ zit. Uit dit alles volgt dat $W$ een lineaire deelruimte is.
(b) We berekenen B(f(x)+g(x))=

$$= (x^2 - x)(f(x) + g(x))' = (x^2 - x)f'(x) + (x^2 - x)g'(x) = B(f(x) + B(g(x))$$

en

$$B(\lambda f(x)) = (x^2 - x)(\lambda f(x))' = \lambda(x^2 - x)(f'(x) = \lambda B(f(x)).$$

Dus $B$ is lineair.
(c) $B$ is niet injectief, omdat $B(1) = 0$. Dus kern bevat meer dan alleen de nulfunctie. $B$ is surjectief. Merk daarvoor eerst het volgende op. Omdat een element in $W$ 0 en 1 als nulpunten heeft kan zo'n polynoom geschreven worden als $p(x) = x(x-1)q(x)$, waarbij $q(x)$ een element van $V$ is. Zo'n element heeft een origineel onder $B$ namelijk elke primitieve $Q(x)$ van $q(x)$, immers $B(Q(x)) = (x^2 - x)Q'(x) = x(x - 1)q(x) = p(x)$. Dus surjectief!
(d) Gebruik makend van onderdeel (c), kunnen we als basis kiezen $\mathbf{c}_i = (x^2 - x)x^i$ met $i = 0, 1, 2, 3$ deze zijn duidelijk onafhankelijk.
(e) $B(\mathbf{e}_i) = i(x^2 - x)x^{i-1} = i\mathbf{c}_{i-1}$ Dus de matrix is

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. Zij $A_{3,3}$ de vectorruimte van reële antisymmetrische $3 \times 3$-matrices, d.w.z. matrices die voldoen aan $X^t = -X$.
(a) (2 punten) Toon aan dat

$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

een basis vormt van $A_{3,3}$.
(b) (2 punten) Bewijs dat de afbeelding $T : A_{3,3} \to \mathbb{R}^3$ die gegeven wordt door

$$T\left(\begin{pmatrix} 0 & x & z \\ -x & 0 & y \\ -z & -y & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

lineair is.
(c) (3 punten) Laat $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ het standaard inproduct op $\mathbb{R}^3$ zijn. Bewijs dat voor $A, B \in A_{3,3}$ de formule $\langle A, B\rangle = T(A) \cdot T(B)$, een inproduct definieert op $A_{3,3}$.
(d) (3 punten) Laat $A, B \in A_{3,3}$, definieer het product $A \otimes B = AB - BA$ (N.B. $A \otimes B \in A_{3,3}$, dit hoef je niet te bewijzen). Toon aan dat $T(A \otimes B) = T(A) \times T(B)$, waarbij $\times$ staat voor het uitproduct op $\mathbb{R}^3$.

**Uitwerking:** (a) $A$ antisymmetrisch, dus $a_{ij} = -a_{ji}$, dus $a_{ii} = 0$ en de coefficienten onder de diagonaal worden bepaald door de waarden van de elementen boven de diagonaal. Een algemene matrix is van de vorm

$$\begin{pmatrix} 0 & x & z \\ -x & 0 & y \\ -z & -y & 0 \end{pmatrix} = x\mathbf{f}_1 + y\mathbf{f}_2 + z\mathbf{f}_3.$$

(b) $T(\lambda X + A) =$

$$T\left(\lambda \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ -x & 0 & y \\ -z & -y & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ -a & 0 & b \\ -c & -b & 0 \end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix} 0 & \lambda x + a & \lambda z + c \\ -\lambda x - a & 0 & \lambda y + b \\ -\lambda z - c & -\lambda y - b & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda x + a \\ \lambda y + b \\ \lambda z + c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda T(X) + T(A).$$

Hieruit volgt dat $T$ lineair is.
(c) We gebruiken dat $T$ lineair is:

$$\langle \lambda A + B, C\rangle = T(\lambda A + B) \cdot T(C) = \lambda T(A) \cdot T(C) + T(B) \cdot T(C) = \lambda\langle A, C\rangle + \langle B, C\rangle$$

Dus lineair in de eerste component. Omdat het "dot-product"symmetrisch is, is $\langle A, B\rangle = T(A) \cdot T(B) = T(B) \cdot T(A) = \langle B, A\rangle$ en is dit nieuwe product ook symmetrisch.
Laat $X$ zijn zoals boven dan is $\langle X, X\rangle = x^2 + y^2 + z^2 \geq 0$ en precies dan $= 0$ als $x = y = z = 0$, maar dit is precies dan als $X$ de nulmatrix is. Dus dit product is positief-definiet.
Uit voorafgaande eigenschappen volgt dat dit inderdaad een inproduct is.
(d) In de notatie van boven bereken

$$T(X \otimes A) = T\left(\begin{pmatrix} 0 & cy - zb & xb - ya \\ zb - cy & 0 & az - xc \\ ya - xb & xc - az & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} cy - zb \\ az - xc \\ xb - ya \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

6. (Bonusopgave) Zij $V = \mathbb{R}[x]$ de vectorruimte van polynomen in $x$ met de gebruikelijke optelling en scalaire vermenigvuldiging. Laat $\langle p(x), q(x)\rangle$ een inproduct zijn

op $V$. Definieer polynomen $p_j(x)$ door $p_0(x) = 1$ en

$$p_j(x) = \det \begin{pmatrix} \langle 1,1\rangle & \langle 1,x\rangle & \langle 1,x^2\rangle & \cdots & \langle 1,x^{j-1}\rangle & 1 \\ \langle x,1\rangle & \langle x,x\rangle & \langle x,x^2\rangle & \cdots & \langle x,x^{j-1}\rangle & x \\ \langle x^2,1\rangle & \langle x^2,x\rangle & \langle x^2,x^2\rangle & \cdots & \langle x^2,x^{j-1}\rangle & x^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle x^j,1\rangle & \langle x^j,x\rangle & \langle x^j,x^2\rangle & \cdots & \langle x^j,x^{j-1}\rangle & x^j \end{pmatrix}, \quad \text{voor } j > 0.$$

(a) (2 punten) Toon aan dat $\langle p_j(x), x^k\rangle = 0$ voor $k = 0, 1, 2, \ldots, j-1$.
(b) (3 punten) Bewijs dat $\langle p_j(x), p_k(x)\rangle = 0$ voor $j \neq k$.

**Uitwerking:** Merk op dat $p_j(x)$ een polynoom is van graad $j$. Nu is

$$\begin{aligned}\langle p_j(x), x^k\rangle =& \langle \det \begin{pmatrix} \langle 1,1\rangle & \langle 1,x\rangle & \langle 1,x^2\rangle & \cdots & \langle 1,x^{j-1}\rangle & 1 \\ \langle x,1\rangle & \langle x,x\rangle & \langle x,x^2\rangle & \cdots & \langle x,x^{j-1}\rangle & x \\ \langle x^2,1\rangle & \langle x^2,x\rangle & \langle x^2,x^2\rangle & \cdots & \langle x^2,x^{j-1}\rangle & x^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle x^j,1\rangle & \langle x^j,x\rangle & \langle x^j,x^2\rangle & \cdots & \langle x^j,x^{j-1}\rangle & x^j \end{pmatrix}, x^k\rangle \\ =& \det \begin{pmatrix} \langle 1,1\rangle & \langle 1,x\rangle & \langle 1,x^2\rangle & \cdots & \langle 1,x^{j-1}\rangle & \langle 1,x^k\rangle \\ \langle x,1\rangle & \langle x,x\rangle & \langle x,x^2\rangle & \cdots & \langle x,x^{j-1}\rangle & \langle x,x^k\rangle \\ \langle x^2,1\rangle & \langle x^2,x\rangle & \langle x^2,x^2\rangle & \cdots & \langle x^2,x^{j-1}\rangle & \langle x^2,x^k\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle x^j,1\rangle & \langle x^j,x\rangle & \langle x^j,x^2\rangle & \cdots & \langle x^j,x^{j-1}\rangle & \langle x^j,x^k\rangle \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Als nu $k < j$ dan is de (k+1)-de kolom van de laatste matrix gelijk aan de laatste kolom van die matrix en is de bijbehorende determinant gelijk aan 0. Hieruit volgt (a).
(b) Omdat (a) geldt is $\langle p_j(x), g(x)\rangle = 0$ voor elk polynoom $g(x)$ waarvan de graad kleiner is dan $j$. Dus $\langle p_j(x), p_k(x)\rangle = 0$ voor $k < j$, Hieruit volgt, door de rol van $j$ en $k$ eventueel om te draaien, dat $\langle p_j(x), p_k(x)\rangle = 0$ voor $j \neq k$.