Herkansing Lineaire Algebra

10 maart 2014, 13:30-16:30 uur

OPGAVEN

1. De punten A, B, C, D in $\mathbb{R}^3$ zijn gegeven door:

$$A : \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C : \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad D : \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Zij V het vlak door de punten A, B, C.

   (a) (1 pt) Bepaal het oppervlak van de driehoek met hoekpunten A, B, C.

   (b) (1/2 pt) Bepaal de vergelijking van het vlak V.

   (c) (1 pt) Bepaal de afstand van D tot het vlak V.

2. Beschouw de vectorruimte $V = \mathbb{R}^5$ met daarop het standaard inproduct (dot-product). Zij $W \subset V$ de deelruimte gegeven door de vergelijkingen

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0, \quad x_2 + x_3 + x_5 = 0.$$

   (a) (1/2 pt) Bepaal een basis van W.

   (b) (1/2 pt) Bepaal een basis van het orthogonaal complement van W.

   (c) (1/2 pt) Bepaal een orthonormale basis van W.

   (d) (1 pt) Bepaal de loodrechte projectie van $(2, 0, 0, 1, 1)$ op W.

3. Met $\mathbb{R}[x]$ geven we de vectorruimte van alle polynomen met reële coëfficienten aan, en met $\mathbb{R}[x]_n$ de deelruimte van alle polynomen met graad $\leq n$.

   (a) (1/2 pt) Geef van de volgende twee deelverzamelingen aan of ze lineaire deelruimte van $\mathbb{R}[x]$ zijn of niet, en leg uit waarom.

$$\{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(-1) = 1\}$$
$$\{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(-1) = 0\}$$

   (b) (1/2 pt) Bepaal de rang en een basis van het opspansel van de vectoren

$$1 + 2x - x^2, 2 - x + x^2 + x^3, x^2 + x^3, -2 - x^3 \in \mathbb{R}[x]$$

   De lineaire afbeelding $D : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$ wordt gegeven door $D : p(x) \mapsto x^2 p''(x) + p'(x)$, waarin het accent differentiatie naar x betekent.

   (c) (1/2 pt) Geef de matrix van D ten opzichte van de geordende standaardbasis $1, x, x^2$ van $\mathbb{R}[x]_2$.

(d) (1 pt) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van D. Schrijf de eigenvectoren als elementen van $\mathbb{R}[x]$ op.

4. Laat $V = \mathbb{R}^3$ met daarop het standaard inproduct (dot-product). Laat $\mathbf{a} \in V$ een vector $\neq \mathbf{0}$ zijn en definieer $T : V \to V$ door

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2\,\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}\mathbf{a}.$$

(a) (1/2 pt) Laat zien dat T een lineaire afbeelding is.

(b) (1/2 pt) Laat zien dat T orthogonaal is.

(c) (1/2 pt) Laat zien dat T symmetrisch is.

(d) (1 pt) Bepaal de eigenwaarden van T en de dimensies van de bijbehorende eigenruimten.