Tentamen Lineaire Algebra

31 januari 2013, 8:30-11:30 uur

OPGAVEN MET UITWERKINGEN

1. In $\mathbb{R}^3$ zijn de rechte lijnen l, m gegeven met parametervoorstellingen

$$l : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad m : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) (1/2 pt) Bewijs dat l en m elkaar niet snijden.

Oplossing: Los het stelsel vergelijkingen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

op in λ, μ. Uit de tweede vergelijking volgt dat $\lambda = 1$. Samen met de eerste vergelijking geeft dit $\mu = 1$. Maar $\lambda = \mu = 1$ is geen oplossing voor de derde vergelijking.

(b) (1 pt) Bepaal de afstand tussen l en m.

Oplossing: Kies λ, μ zodanig dat de verschilvector

$$\mathbf{d} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \mu \\ -\lambda + 1 \\ \lambda - \mu - 1 \end{pmatrix}$$

loodrecht op de richtingsvectoren van l en m staan. We bepalen hiervoor de inproducten. De vector $\mathbf{d}$ staat loodrecht op l precies dan als $0 = (\lambda - \mu) \cdot 1 + (-\lambda + 1 - \mu) \cdot (-1) + (\lambda - \mu - 1) \cdot 1 = 3\lambda - 2\mu - 2$. De vector $\mathbf{d}$ staat loodrecht op m als $0 = (\lambda - \mu) \cdot 1 + (-\lambda + 1) \cdot 0 + (\lambda - \mu - 1) \cdot 1 = 2\lambda - 2\mu - 2$. Oplossing van de vergelijkingen $3\lambda - 2\mu - 2 = 0$ en $2\lambda - 2\mu - 2 = 0$ geeft $\mu = 1/2, \lambda = 1$. De vector $\mathbf{d}$ wordt dus $(1/2, 0, -1/2)^t$ en de lengte daarvan is $1/\sqrt{2}$.

(c) (1 pt) Gegeven is het vlak V met vergelijking $x_1 - x_2 - x_3 = 2$. Bepaal een parametervoorstelling van de lijn die loodrecht op V staat en zowel l als m snijdt.

Oplossing: Kies λ, μ nu zó dat de verschilvector $\mathbf{d}$ parallel loopt aan de normaalvector van V. Dus, bepaal λ, μ, ν zó dat

$$\begin{pmatrix} \lambda - \mu \\ -\lambda + 1 \\ \lambda - \mu - 1 \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Oplossing van dit stelsel vergelijkingen geeft $\lambda = 3/2, \mu = 1, \nu = 1/2$. Een steunpunt wordt gegeven door op m de waarde $\mu = 1$ te kiezen. En dat is $(2, -1, 2)$. De gevraagde lijn:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. In $\mathbb{R}^4$ nemen we het standaard inproduct (dot product). Zij W de deelruimte gegeven door $x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0$ (hierin zijn x_1, x_2, x_3, x_4 de coördinaten ten opzichte van de standaardbasis).

   (a) (1/2 pt) Bepaal een basis van W.

   Oplossing. De ruimte W heeft dimensie 3. Drie onfhankelijke vectoren in W zijn, $(1, -1, 0, 0)^t, (2, 0, -1, 0)^t, (1, 0, 0, 1)^t$.

   (b) (1 pt) Bepaal een orthonormale basis van W.

   Oplossing We voeren Gram-Schmidt uit op de bovenstaande basis. De Gram-matrix wordt

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Samen met de vectoren,

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 2 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

   Na de eerste veegoperatie:

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 2 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

   Na de tweede veegoperatie:

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 2 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7/6 & 1/6 & 1/6 & -1/3 & 1 \end{array}\right).$$

   Een orthonormale basis:

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0)^t, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1, 0)^t, \quad \mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{42}}(1, 1, -2, 6)^t.$$

   (c) (1/2 pt) Bepaal een orthonormale basis van het orthogonaal complement van W.

   Oplossing: De coordinatenvector $(1, 1, 2, -1)^t$ van W staat loodrecht op alle vectoren uit W. Normaliseren geeft $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{7}}(1, 1, 2, -1)^t$.

(d) (1/2 pt) Bepaal de orthogonale projectie van de vector $(1,1,0,0)^t$ op W.
Oplossing: Noem de vector $\mathbf{a}$. De projectie van $\mathbf{a}$ op W wordt gegeven door

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{f}_1)\mathbf{f}_1 + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{f}_2)\mathbf{f}_2 + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{f}_3)\mathbf{f}_3$$

en dit is gelijk aan

$$\begin{aligned} & 0\times(1,-1,0,0) + \frac{2}{3}(1,1,1,0) + \frac{2}{42}(1,1,-2,6) \\ = \; & (5/7, 5/7, 4/7, 2/7) \end{aligned}$$

Een andere manier is op de normaalvector $\mathbf{n}$ te projecteren en deze van $\mathbf{a}$ af te trekken. Dat geeft $\mathbf{a} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$ met hetzelfde antwoord.

3. Zij V de vectorruimte over $\mathbb{R}$ bestaande uit de polynomen van graad ≤ 3 met coëfficienten in $\mathbb{R}$.

(a) Geef van de volgende deelverzamelingen van V aan of ze een lineaire deelruimte van V vormen of niet, en onderbouw je bewering.

i. (1/2 pt) $W = \{p(x) \in V |\ p(1) = 1\}$.
Oplossing: geen deelruimte, want het nulpolynoom (nulvector) ligt niet in de verzameling.

ii. (1/2 pt) $W = \{p(x) \in V |\ p(1) = 0\}$.
Oplossing: is wel deelruimte. Stel $p(x), q(x) \in W$ en $\lambda \in \mathbb{R}$. Dan:

A. Het nulpolynoom heeft waarde nul in $x = 0$.
B. $(p+q)(0) = p(0) + q(0) = 0 + 0 = 0$, dus $p + q \in W$
C. $(\lambda p)(0) = \lambda p(0) = \lambda \cdot 0 = 0$, dus $\lambda p \in W$.

Beschouw de lineaire afbeelding $T : V \to V$ gegeven door $T : p(x) \mapsto -p(x)+(x+1)\frac{dp(x)}{dx}$.

(b) (1/2 pt) Bepaal de matrix van T ten opzichte van de geordende basis $\{1, x, x^2, x^3\}$.
Oplossing: $T(1) = -1, T(x) = -x + (x + 1) = 1, T(x^2) = -x^2 + (x + 1)(2x) = x^2 + 2x, T(x^3) = -x^3 + (x + 1)(3x^2) = 2x^3 + 3x^2$. De matrix wordt nu

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) (1 pt) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van T (schrijf de eigenvectoren als polynomen op).
Oplossing: We werken nu met de matrix van T. Eigenwaardevergelijking:

$$0 = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda).$$

De eigenwaarden zijn dus $-1, 0, 1, 2$. Vier verschillende eigenwaarden, er is dus basis van eigenvectoren. De eigenvectoren zijn veelvouden van:

$$(1,0,0,0),\ (1,1,0,0),\ (1,2,1,0),\ (1,3,3,1).$$

In polynomen opgeschreven, $1, x+1, x^2+2x+1 = (x+1)^2, x^3+3x^2+3x+1 = (x+1)^3$.

4. In een vectorruimte V met inproduct $\langle\ ,\ \rangle$ is het tweetal vectoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, beiden $\neq \mathbf{0}$, gegeven. Zij W het opspansel van $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ en stel dat $W \neq V$. Beschouw de afbeelding $A : V \to V$ gegeven door

$$A : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{b} + \langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{a}.$$

(a) (1/2 pt) Bewijs dat A een lineaire afbeelding is.

Oplossing: Stel $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ en $\lambda \in \mathbb{R}$. Dan,

i.

$$\begin{aligned} A(\lambda\mathbf{x}) &= \lambda\mathbf{x} + \langle \lambda\mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{b} + \langle \lambda\mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{a} \\ &= \lambda\mathbf{x} + \lambda\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{b} + \lambda\langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{a} \\ &= \lambda(\mathbf{x} + \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{b} + \langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{a}) = \lambda A(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= \mathbf{x}+\mathbf{y} + \langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{b} + \langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{a} \\ &= \mathbf{x}+\mathbf{y} + \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{b} + \langle \mathbf{y}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{b} + \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{b} + \langle \mathbf{y}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{b} \\ &= \mathbf{x} + \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{b} + \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{b} + \mathbf{y} + \langle \mathbf{y}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{b} + \langle \mathbf{y}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{b} \\ &= A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

(b) (1/2 pt) Bewijs dat A een symmetrische afbeelding is.

Oplossing: Stel $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Dan

$$\begin{aligned} \langle A(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle &= \langle \mathbf{x} + \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{b} + \langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle \langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle \end{aligned}$$

Op dezelfde manier zien we dat

$$\langle \mathbf{x}, A(\mathbf{y}) \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle \langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle.$$

Beide uitkomsten zijn hetzelfde, dus $\langle A(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, A(\mathbf{y}) \rangle$ en A is symmetrisch.

(c) (1 pt) Bepaal de eigenruimte bij eigenwaarde 1 (hint: onderscheid de gevallen dat $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ onafhankelijk respectievelijk afhankelijk zijn).

Oplossing: Uit $A(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ volgt $\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{b} + \langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{a} = \mathbf{0}$. Stel dat $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ onfahnkelijk zijn, dan volgt hieruit dat $\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle = 0$. Dus $\mathbf{x}$ zit in het orthogonaal complement van W. Omgekeerd geldt voor iedere vector $\mathbf{x}$ uit het orthogonaal complement van W dat $A(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. Dus eigenruimte van 1 is $W^\perp$ als $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ onafhankelijk zijn.

Stel nu dat $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ afhankelijk. Omdat $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ heeft W nu dimensie 1. Verder is er een $\lambda \in \mathbb{R}$, met $\lambda \neq 0$ zó dat $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$. Invullen in $\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{b} + \langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{a} = \mathbf{0}$ geeft, $2\lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{a} = \mathbf{0}$. Omdat $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ en $\lambda \neq 0$ volgt hieruit dat $\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle = 0$. Dus $\mathbf{x}$ zit in het orthogonaal complement van W. Omgekeerd geldt voor iedere $\mathbf{x}$ in het orthogonaal complement van W dat $A(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. Dus wederom geldt dat de eigenruimte bij 1 gelijk is aan $W^\perp$.

(d) (1/2 pt) Neem nu aan dat $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ een orthonormaal stelsel vormt. Bepaal de eigenwaarden met bijbehorende eigenruimten van A.

Oplossing: Stel $\mathbf{x}$ is een eigenvectore met eigenwaarde $\neq 1$. dan geldt $\lambda \mathbf{x} = A(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{b} + \langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{a}$. Daaruit volgt: $(\lambda - 1)\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{b} + \langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{a}$. Daarmee ligt $(\lambda - 1)\mathbf{x}$ in W en, omdat $\lambda - 1 \neq 0$, $\mathbf{x} \in W$. De afbeelding A beeldt W naar zichzelf af en we kunnen volstaan met de eigenvectoren in W te bepalen. Kies de basis $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ van W. Bepaal de matrix van A, beperkt tot W, ten opzichte van $\mathbf{a}, \mathbf{b}$. We krijgen

$$A(\mathbf{a}) = \mathbf{a} + \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{b} + \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$$

en

$$A(\mathbf{b}) = \mathbf{b} + \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{b} + \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{a}.$$

De matrix wordt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

De eigenwaarden zijn $1, 0$ met eigenvectoren $(1, 1)$ en $(1, -1)$ (tov de basis $\mathbf{a}, \mathbf{b}$). De eigenvectoren zijn dus $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ en $\mathbf{a} - \mathbf{b}$. Dit hadden we ook meteen kunnen zien.