Tentamen Lineaire Algebra
maandag 30-01-2017, 13.30-16.30 uur

- Het is niet toegestaan telefoons, computers, grafische rekenmachines (wel een gewone), dictaten, boeken of aantekeningen te gebruiken.
- Schrijf op elk vel je naam en studentnummer.
- Alle onderdelen van een opgave zijn 1 punt waard behalve als dit anders is vermeld. Totaal kun je 44 punten behalen. Het cijfer van je tentamen is het behaalde aantal punten gedeeld door 4, met dien verstande dat het tentamencijfer nooit hoger kan zijn dan een 10.
- Geef niet alleen antwoorden, maar bewijs al je beweringen.

SUCCES!

1. (a) (4 punten) Bepaal een basis voor de rijruimte $R(A)$ en de kolomruimte $C(A)$ van de volgende matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 \\ -2 & -5 & 8 & 0 \\ 3 & 11 & -19 & 7 \\ 1 & 7 & -13 & 5 \end{pmatrix}.$$

Antwoord: We gaan vegen. Uiteindelijk kom je dan uit op de volgende matrix:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dit betekent dat een basis voor de rijruimte is

$$\{(1, 3, -5, 1), (0, 1, -2, 2), (0, 0, 0, 1)\}.$$

We vinden een basis van de kolomruimte door naar de pivots te kijken, die staan in kolom 1, 2 en 4, dat betekent dat die kolommen van A een basis vormen van de kolomruimte:

$$\{(1, -2, 3, 1)^t, (3, -5, 11, 7)^t, (1, 0, 7, 5)^t\}$$

(b) Wat is de rang van A?
Antwoord: 3, want kolom of rijruimte is 3-dimensionaal.

(c) Wat is de dimensie van de nulruimte van A?
Antwoord: 1, dit volgt uit de stelling:
dim(rijruimte)+ dim(nulruimte) = dim(oorspronkelijke ruimte)=4.

(d) (2 punten) Bepaal vervolgens een basis van de nulruimte $N(A)$ van A.
Antwoord: We kunnen hier gebruik mahen van de geveegde matrix A' en hiervan de nulruimte berekenen dat geeft hetzelfde antwoord: Je krijgt dan als basis de vector $(-1, 2, 1, 0)$.

(e) Bepaal ook een basis van $A\mathbb{R}^4$, het beeld van de lineaire afbeelding die je krijgt door de matrix op een vector te laten werken.
Dit is hetzelfde als een basis van de kolomruimte, zie hiervoor vraag (a).

(f) Laat op $\mathbb{R}^4$ het standaard inproduct gegeven zijn, toon aan dat $N(A)$ loodrecht staat op $R(A)$.
Antwoord: De nulruimte zijn die vectoren die door A op nul worden afgebeeld. In feite zijn dit alle vectoren die loodrecht staan op de rijen van A en als zodanig dus loodrecht op de gehele rijruimte van A.
N.B. Je kunt hier ook laten zien dat de basisvectoren van de rijruimte loodrecht staan op alle basisvectoren van de nulruimte.

(g) Bewijs dat $\mathbb{R}^4 = N(A) \oplus R(A)$.
Antwoord: We maken gebruik van de stelling dat als V een eindig-dimensionale vectorruimte en W een lineaire deelruimte dan $V = W \oplus W^\perp$. Nu is V hier $\mathbb{R}^4$ en $W = R(A)$, de rijruimte van A, welke drie-dimensionaal is. We hebben in het vorige onderdeel bewezen dat de nulruimte loodrecht staat op $R(A)$, dus de nulruimte is een lineaire deelruimte van $R(A)^\perp$. Aangezien zowel $R(A)^\perp$ als de nulruimte van A beide 1-dimensionaal zijn, is $R(A)^\perp$ dus gelijk aan de nulruimte $N(A)$.

2. Beschouw de inproductruimte $(\mathbb{R}, \mathbb{R}[x], +, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ waarbij $\mathbb{R}[x]$ de vectorruimte van polynomen is. Het inproduct $\langle\cdot,\cdot\rangle$ wordt gegeven door

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx\,.$$

Laat $W = \text{span}\{1 + x, x^2, x^3\}$.

(a) (5 punten) Bepaal een orthogonale basis van W.
Antwoord: N.B. Als je gewoon Gram-Schmidt uitvoert kom je uit op een vervelende rekenpartij. Het is altijd handig om eerst eens naar de basis te kijken. Aangezien

$$\int_{-1}^{1} x^n dx = \frac{1}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1}$$

kun je zien dat x^2 en x^3 al loodrecht op elkaar staan: je kunt dit dus als je eerste twee orthogonale vectoren/polynomen kiezen. De derde vector krijg je dus als volgt:

$$1 + x - \frac{\langle 1 + x, x^2\rangle}{\langle x^2, x^2\rangle}x^2 - \frac{\langle 1 + x, x^3\rangle}{\langle x^3, x^3\rangle}x^3 = 1 + x - \frac{5}{3}x^2 - \frac{7}{5}x^3$$

Vermenigvuldig dit met 15 dan krijg je als derde de veelterm $15 + 15x - 25x^2 - 21x^3$.

(b) Bepaal de lengte van deze basisvectoren.
De lengte is respectievelijk $\sqrt{\frac{2}{5}}$, $\sqrt{\frac{2}{7}}$ en de wortel van

$$\int_{-1}^{1} \left(15 + 15x - 25x^2 - 21x^3\right)^2 dx = 224$$

(c) (2 punten) Bepaal de orthogonale projectie (= loodrechte projectie) van 1 op W.
Antwoord:

$$\frac{5}{2}\int_{-1}^{1} 1 \cdot x^2 dx \; x^2 + \frac{7}{2}\int_{-1}^{1} 1 \cdot x^3 dx \; x^3 +$$
$$\frac{1}{224}\int_{-1}^{1} 1\left(15 + 15x - 25x^2 - 21x^3\right) dx \; (15 + 15x - 25x^2 - 21x^3)$$
$$= 5/3x^2 + \frac{5}{24}(15 + 15x - 25x^2 - 21x^3)$$
$$= \frac{5}{8}(5 + 5x + 5x^2 - 7x^3)$$

(d) Wat is de afstand van 1 tot W?
Antwoord: Dit is de lengte van $\frac{5}{8}(5 + 5x + 5x^2 - 7x^3) - 1$ en dit is $\sqrt{\frac{137}{6}}$.

3. Laat B de volgende matrix zijn

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(a) (2 punten) Bepaal de nulruimte $N(B)$ van B. Andwoord: Na vegen zie je eenvoudig dat $(1, 1, -1)$ een basis is van de nulruimte. We weten nu dat 0 een eigenwaarde is en bijbehorende eigenvector is $(1, 1, -1)$

(b) (4 punten) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van B.
Karakteristiek polynoom is $\pm(\lambda^3 - \lambda)$, dus we hebben eigenwaarden 0, 1 en -1. Eigenvector bij eigenwaarde 1 is $(1, 1, 1)$ en eigenvector bij eigenwaarde -1 is $(1, 0, -1)$.

(c) (4 punten)Bepaal B^{2017}.
Andwoord: Laat

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(kolommen zijn de eigenvectoren bij eigenwaarden 0, 1, -1, respectievelijk), dan is

$$B = S \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} S^{-1}$$

en is

$$B^{2017} = S \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{2017} S^{-1} = S \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} S^{-1} = B\,.$$

Merk op dat we in feite S^{-1} niet hoeven te bepalen om het antwoord te vinden.

4. Laat $M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ een lineaire afbeelding zijn, die voldoet aan de eigenschap dat $M^n(\vec{v}) = \vec{0}$ voor alle $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, maar $M^{n-1}(\vec{w}) \neq \vec{0}$ voor minstens een $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$. Hierbij is $M^p = M \circ M \circ M \circ \cdots \circ M$, de samenstelling van M p-maal en $M^0 = \mathrm{Id}_n$. Bewijs nu de volgende beweringen:

   (a) $\mathrm{Ker}(M^{p-1}) \subseteq \mathrm{Ker}(M^p)$ voor $p = 1, 2, \ldots, n$.
   Bewijs: Laat $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(M^{p-1})$, dan is $M^{p-1}\vec{x} = \vec{0}$, dus is $M^p\vec{x} = M\left(M^{p-1}\vec{x}\right) = M\vec{0} = \vec{0}$. Conclusie $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(M^p)$ en hiermee hebben we dit bewezen.

   (b) $\mathrm{Im}(M^p) \subseteq \mathrm{Im}(M^{p-1})$ voor $p = 1, 2, \ldots, n$.
   Bewijs: Laat $\vec{x} \in \mathrm{Im}(M^p)$, dan bestaat er een $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ zodat $\vec{x} = M^p\vec{y} = M^{p-1}(M\vec{y})$. Laat nu $\vec{w} = M\vec{y}$, dan is $\vec{x} = M^{p-1}\vec{w}$, dus $\vec{x} \in \mathrm{Im}(M^{p-1})$.

   (c) $\mathrm{Im}(M^{n-p}) \subseteq \mathrm{Ker}(M^p)$ voor $p = 0, 1, 2, \ldots, n$.
   Bewijs: Laat $\vec{x} \in \mathrm{Im}(M^p)$, dan is $M^{n-p}\vec{x} = M^{n-p}\left(M^p\vec{y}\right) = M^n\vec{y} = \vec{0}$ dus $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(M^{n-p})$.

   (d) $\mathrm{Im}(M^p) \neq \mathrm{Im}(M^{p-1})$ voor $p = 1, 2, \ldots, n$.
   Bewijs: Stel we hebben wel een gelijkheid voor zekere p, dan is $\mathrm{Im}(M^p) = \mathrm{Im}(M^{p-1})$ en hebben we voor elke $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ dat er een $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ bestaat zodat $M^{p-1}\vec{x} = M^p\vec{y}$, maar dan is $M^{n-1}\vec{x} = M^{n-p}\left(M^{p-1}\vec{x}\right) = M^{n-p}\left(M^p\vec{y}\right) = M^n\vec{y} = \vec{0}$, dit is in tegenspraak met de aanname dat $M^{n-1}(\vec{w}) \neq \vec{0}$ voor minstens een $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$. Dus voor elke p hebben we een ongelijkheid.

   (e) $\mathrm{Ker}(M^{p-1}) \neq \mathrm{Ker}(M^p)$ voor $p = 1, 2, \ldots, n$.
   Bewijs: We gebruiken hier de dimensie-stelling $n = \dim(\mathrm{Ker}(M^p) + \dim(\mathrm{Im}(M^p)$ voor elke $p = 0, 1, \cdots, n$. Omdat $\mathrm{Im}(M^p) \neq \mathrm{Im}(M^{p-1})$ voor $p = 1, 2, \ldots, n$ geldt hetzelfde voor de kernen.

   (f) $\dim(\mathrm{Ker}(M^p)) = p$ voor $p = 0, 1, 2, \ldots, n$.
   Bewijs: Dit is een telargument. Er geldt $\mathrm{Ker}(M^{p-1}) \subsetneq \mathrm{Ker}(M^p)$ voor $p = 1, 2, \ldots, n$, dus

   $$\{\vec{0}\} = \mathrm{Ker}(M^0) \subsetneq \mathrm{Ker}(M) \subsetneq \mathrm{Ker}(M^2) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathrm{Ker}(M^{n-1}) \subsetneq \mathrm{Ker}(M^n) = \mathbb{R}^n.$$

   Dit is alleen maar mogelijk als bij elke inclusie de dimensie met 1 toeneemt, ofwel dat $\dim(\mathrm{Ker}(M^p)) = p$.

   (g) $\dim(\mathrm{Im}(M^{n-p})) = p$ voor $p = 0, 1, 2, \ldots, n$.
   Bewijs: Opnieuw de dimensiestelling $n = \dim(\mathrm{Ker}(M^p) + \dim(\mathrm{Im}(M^p) = p + \dim(\mathrm{Im}(M^p)$. Dus $\dim(\mathrm{Im}(M^p) = n - p$, ofwel $\dim(\mathrm{Im}(M^{n-p}) = p$.

(h) $\mathrm{Im}(M^{n-p}) = \mathrm{Ker}(M^p)$ voor $p = 0, 1, 2, \ldots, n$.
Bewijs: Dit volgt uit onderdelen (c), (f) en (g). $\mathrm{Im}(M^{n-p})$ is een lineaire deelruimte van $\mathrm{Ker}(M^p)$, maar ze hebben allebei dezelfde dimensie, dus moeten ze wel gelijk zijn.

5. Beschouw de inproductruimte $(\mathbb{R}, V, +, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ en laat $L : V \to V$ een lineaire afbeelding zijn die voldoet aan $\langle L(\vec{v}), L(\vec{v})\rangle = \langle \vec{v}, \vec{v}\rangle$ voor alle vectoren $\vec{v} \in V$.

(a) Toon aan dat $\langle L(\vec{v}), L(\vec{w})\rangle = \langle \vec{v}, \vec{w}\rangle$ voor elk willekeurig paar $\vec{v}, \vec{w} \in V$.
Dit is een stelling in het boek. Het bewijs is alsvolgt: Aangezien

$$\langle L(\vec{v}) + L(\vec{w}), L(\vec{v}) + L(\vec{w})\rangle = \langle L(\vec{v} + \vec{w}), L(\vec{v} + \vec{w})\rangle = \langle \vec{v} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w}\rangle$$

krijgen we dat

$$\langle L(\vec{v}), L(\vec{v})\rangle + 2\langle L(\vec{v}), L(\vec{w})\rangle + \langle L(\vec{w}), L(\vec{w})\rangle = \langle \vec{v}, \vec{v}\rangle + 2\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle + \langle \vec{w}, \vec{w}\rangle\,.$$

Nu is $\langle L(\vec{v}), L(\vec{v})\rangle = \langle \vec{v}, \vec{v}\rangle$ en $\langle L(\vec{w}), L(\vec{w})\rangle = \langle \vec{w}, \vec{w}\rangle$, dus is $\langle L(\vec{v}), L(\vec{w})\rangle = \langle \vec{v}, \vec{w}\rangle$.

(b) (2 punten) Bewijs dat L injectief is.
Bewijs: Stel L niet injectief, dan zit er een $\vec{v} \neq \vec{0}$ in de kern van L, maar dan geldt voor deze $\vec{v}$ dat

$$0 = \langle \vec{0}, \vec{0}\rangle = \langle L(\vec{v}), L(\vec{v})\rangle = \langle \vec{v}, \vec{v}\rangle,$$

maar aangezien $\vec{v} \neq \vec{0}$ is $\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle \neq 0$ en krijgen we een tegenspraak. Dus $\mathrm{Ker}(L) = \{\vec{0}\}$ en omdat L lineair is, is L injectief.

(c) Bewijs dat als $\dim(V) < \infty$ dat L inverteerbaar is.
Bewijs: Ditvolgt uit de stelling: V eindig-dimensionaal, dan als L lineair en injectief, dan L ook surjectief en dus ook bijectief.

(d) (2 punten) Is L ook inverteerbaar als V niet eindig-dimensionaal is? Bewijs je bewering of geef een tegenvoorbeeld.
Dit hoeft niet waar te zijn. Neem bijvoorbeeld de ruimte van polynomen $\mathbb{R}[x]$ met inproduct

$$\langle a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0\rangle = \sum_{j=0}^{\min(n,m)} a_j b_j$$

en neem voor L de afbeelding

$$L(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = a_n x^{n+1} + a_{n-1}x^n + \cdots + a_1 x^2 + a_0 x\,.$$

Dan is eenvoudig aan te tonen dat deze afbeelding lineair aan de voorwaarden voldoet dat L de lengte van een vector niet veranderd, maar L is niet surjectief, omdat het constante polynoom 1 nooit bereikt wordt.