Tentamen Lineaire Algebra
maandag 18-04-2017, 13.30-16.30 uur

- Het is niet toegestaan telefoons, computers, grafische rekenmachines (wel een gewone), dictaten, boeken of aantekeningen te gebruiken.
- Schrijf op elk vel je naam en studentnummer.
- Alle onderdelen van een opgave zijn 1 punt waard behalve als dit anders is vermeld. Totaal kun je 44 punten behalen. Het cijfer van je tentamen is het behaalde aantal punten gedeeld door 4, met dien verstande dat het tentamencijfer nooit hoger kan zijn dan een 10.
- Geef niet alleen antwoorden, maar bewijs al je beweringen. Je mag gebruikmaken van resultaten van voorafgaande onderdelen, ook al heb je die niet kunnen bewijzen/aantonen.

SUCCES!

1. (a) (2 punten)Veeg de volgende matrix naar bovendriehoeksvorm (trapvorm):

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -6 \\ 6 & -2 & -4 \\ -12 & 8 & 21 \end{pmatrix}.$$

   (b) (2 punten) Bepaal de LU-decompositie van de matrix A.

   (c) Wat is de rang van A?

   (d) Wat is de dimensie van de nulruimte van A?

   (e) (2 punten) Geef alle oplossingen van $A\vec{x} = (6, 8, -25)^T$.

2. (a) (2 punten) Bewijs dat $\mathcal{B} = \{(1,1,1), (1,-2,1), (0,1,1)\}$ een basis is van $\mathbb{R}^3$.

   (b) (6 punten) Laat $C : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de lineaire afbeelding zijn waarvan de matrix ten opzichte van de standaard basis gegeven wordt door

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Bepaal de matrix van de afbeelding C ten opzichte van $\mathcal{B}$ (in de notatie van het boek is dit de matrix $C^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$).

3. Beschouw de inproductruimte $(\mathbb{R},\ \mathbb{R}^3,\ +,\ \langle\cdot,\cdot\rangle)$ waarbij het inproduct $\langle\cdot,\cdot\rangle$ wordt gegeven door

$$\langle(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2 + x_3y_3\,.$$

(a) (4 punten) Toon aan dat $\langle \cdot, \cdot \rangle$ inderdaad een inproduct op $\mathbb{R}^3$ definieert.

(b) (4 punten) Bepaal ten opzichte van het gegeven inproduct een orthonormale basis van $\mathrm{vct}(\{(1,0,1),(1,2,3)\})$.

4. Laat
$$D = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

   (a) Toon aan dat D een orthogonale matrix is.

   (b) Bepaal de inverse van D.

   (c) (2 punten) Bepaal de (mogelijk complexe) eigenwaarden van D.

   (d) (4 punten) Bepaal de (mogelijk complexe) eigenvectoren van D.

5. Zij V een reële vectorruimte van eindige dimensie n en laat $L, K : V \to \mathbb{R}$ twee lineaire afbeeldingen zijn met $\ker(L) \subset \ker(K)$ en veronderstel dat er een $\vec{v} \in V$ bestaat zodat $K(\vec{v}) \neq 0$.

   (a) Bepaal $\dim(\ker(K))$ in termen van n.

   (b) (2 punten) Bewijs dat $\dim(\ker(K)) = \dim(\ker(L))$.

   (c) Bewijs dat $K = \lambda L$ voor zekere $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$.

6. Beschouw de ruimte $\mathbb{R}^n$ met standaard inproduct. Laat A een reële $n \times n$-matrix.

   (a) (2 punten) Toon aan dat A en A^T dezelfde eigenwaarden hebben.

   (b) Laat $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$, toon aan dat $\vec{w}^T A \vec{v} = \vec{v}^T A^T \vec{w}$.

   (c) (2 punten) Laat $\vec{v}$ een eigenvector van A bij eigenwaarde λ en $\vec{w}$ een eigenvector van A^T bij eigenwaarde μ. Bewijs dat als $\lambda \neq \mu$ dat $\vec{v}$ loodrecht staat op $\vec{w}$.

   (d) (2 punten) Laat A nu n verschillende reële eigenwaarden hebben. Laat zien dat er een basis $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ van eigenvectoren van A bestaat en een basis $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_n$ van eigenvectoren van A^T zodat $\vec{v}_i \cdot \vec{w}_j = \delta_{ij}$, waarbij $\delta_{ij} = 1$ als $i = j$ en $\delta_{ij} = 0$ als $i \neq j$.

   (e) Bewijs dat als A symmetrisch met n verschillende reële eigenwaarden dat A dan een orthonormale basis van eigenvectoren heeft.