Tentamen Lineaire Algebra
maandag 16-04-2018, 13.30-16.30 uur

- Het is niet toegestaan telefoons, computers, grafische rekenmachines (wel een gewone), dictaten, boeken of aantekeningen te gebruiken.
- Schrijf op elk vel je naam en studentnummer.
- Alle onderdelen van een opgave zijn 2 punten waard behalve als dit anders is vermeld. Totaal kun je 39 punten halen. Het cijfer van je tentamen is het behaalde aantal punten gedeeld door 3,5 , met dien verstande dat het tentamencijfer nooit hoger kan zijn dan een 10.
- Bij opgave 5 moet je dingen aantonen voor algemene $1 < n \in \mathbb{N}$. Als je niet in staat bent om dit te doen, toon dit dan aan voor $n = 3$.
- Geef niet alleen antwoorden, maar bewijs al je beweringen.

SUCCES!

1. (a) (4 punten) Bepaal de determinant en de inverse van volgende matrix:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}.$$
   (b) Los op $A\vec{x} = (1,1,1)^T$.

2. Laat
$$\beta = \{(1,1,1),(1,1,-1,),(1,-1,-1)\}$$
een nieuwe basis zijn van $\mathbb{R}^3$.

   (a) Bepaal bepaal de coördinaten van de vector $(3,1,-1)$ ten opzichte van de geordende basis β.

   (b) (5 punten) Zij $C = C_E^E$ de volgende matrix ten opzichte van de standaard basis $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$:
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Bepaal C_β^β, d.w.z de matrix van C t.o.v. de nieuwe basis β.

3. Beschouw de inproductruimte $(\mathbb{R}, \mathbb{R}[x], +, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ waarbij $\mathbb{R}[x]$ de vectorruimte van polynomen is. Het inproduct $\langle\cdot,\cdot\rangle$ wordt gegeven door
$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)x^2dx\,.$$
Laat $W = \text{span}\{x, x^2, x^3\}$.

(a) (5 punten) Bepaal een orthogonale basis van W.

(b) Bepaal de lengte van deze basisvectoren.

(c) Bepaal de orthogonale projectie (= loodrechte projectie) van 1 op W.

(d) Wat is de afstand van 1 tot W?

4. (a) (3 punten) Bepaal de eigenvector bij eigenwaarde 1 van de volgend stochastische matrix

$$B = \begin{pmatrix} \frac{5}{10} & \frac{2}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{8}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{2}{10} & 0 & \frac{4}{10} \end{pmatrix}.$$

(b) (3 punten) Als we deze matrix n keer laten werken op een willekeurige vector $(x_0, y_0, z_0)^T \in \mathbb{R}^3$, d.w.z. laat $(x_n, y_n, z_n)^T = B^n(x_0, y_0, z_0)^T$, wat zal waarschijnlijk de verhouding zijn tussen x_n, y_n en z_n als n groot is? N.B. Je mag hierbij aannemen dat de andere eigenwaarden van B kleiner zijn dan 1 en groter zijn dan 0.
Is dit altijd zo of zijn er uitzonderingen?

5. Laat $1 < n \in \mathbb{N}$ en $P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ een lineaire afbeelding zijn zodanig dat $P^n(x) = P(x)$ voor alle $x \in \mathbb{C}^n$.

(a) Wat zijn de mogelijke eigenwaarden van P?

(b) Wat zijn de mogelijke dimensies van de nulruimte van P?

(c) Kan P inverteerbaar zijn en wat zijn dan de mogelijke eigenwaarden?

(d) (3 punten) Als alle eigenwaarden algebraische multipliciteit 1 hebben, bepaal dan een diagonaalmatrix waarmee P gelijkvormig is. Wat is in dit geval de rang van P?

Als je bovenstaande onderdelen niet kunt bewijzen voor algemene n, toon het dan aan voor $n = 3$.