Tentamen Lineaire Algebra
maandag 29-01-2018, 13.30-16.30 uur

- Het is niet toegestaan telefoons, computers, grafische rekenmachines (wel een gewone), dictaten, boeken of aantekeningen te gebruiken.
- Schrijf op elk vel je naam en studentnummer.
- Alle onderdelen van een opgave zijn 2 punten waard behalve als dit anders is vermeld. Totaal kun je 44 punten halen. Het cijfer van je tentamen is het behaalde aantal punten gedeeld door 4, met dien verstande dat het tentamencijfer nooit hoger kan zijn dan een 10.
- Bij opgave 4 en 5 moet je dingen aantonen voor algemene $n \in \mathbb{N}$. Als je niet in staat bent om dit te doen, toon dit dan aan voor $n = 3$.
- Geef niet alleen antwoorden, maar bewijs al je beweringen.

SUCCES!

1. (a) Bepaal een LU-decompositie van de volgende matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (b) Los op $A\vec{x} = (4, 8, -3)^T$.

2. (a) (5 punten) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van de matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

   (b) (3 punten) Bepaal B^m, voor $m \in \mathbb{N}$.

3. Beschouw de inproductruimte $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^4, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, waarbij $\langle x, y \rangle = \vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^{4} x_i y_i$ het standaard inproduct is.

   (a) Bepaal een basis van

$$W = \text{vct}\left\{(1,1,1,1), (1,-1,-1,1), (1,-2,1,1), (1,2,2,1)\right\}.$$

   (b) Bepaal een vector ongelijk aan $\vec{0}$ loodrecht op W.

   (c) (3 punten) Bepaal een orthogonale basis van W.

   (d) Bepaal vervolgens een orthonormale basis van W.

   (e) Bepaal de orthogonale projectie van $(1, 0, 0, 0)$ op W.

   (f) Wat is het beeld van het punt $(1, 0, 0, 0)$ als je dit punt spiegelt in W?

4. Bekijk de ruimte A_n van reële anti-symmetrische $n \times n$-matrices (d.w.z. $A \in A_n$ dan en slechts dan als $A^T = -A$).

   (a) Laat zien dat dit een lineaire deelruimte is van de ruimte van alle reële $n \times n$-matrices.

   (b) Geef een basis van A_n, toon ook aan dat dit een basis is.

   (c) (1 punt) Wat is $\dim(A_n)$?

   (d) Definieer het volgende product op A_n:

   $$A * B = AB - BA.$$

   Toon aan dat als $A, B \in A_n$, dan ook $A * B \in A_n$.

   (e) Bewijs dat als n oneven is dat $\det(A) = 0$ voor $A \in A_n$.

   Als je bovenstaande onderdelen niet kunt bewijzen voor algemene n, toon het dan aan voor $n = 3$.

5. Laat $x_1, x_2, \ldots, x_n$ variabelen zijn en laat voor $n \in \mathbb{N}$ de matrix C_n gegeven worden door

   $$C_n = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

   (a) Bereken $\det(C_3)$, en merk op dat elke term die voorkomt graad 3 heeft.

   (b) Toon aan dat $\det(C_n)$ een homogene veelterm is in de variabelen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ van graad $\frac{1}{2}(n-1)n$. N.B., homogeen wil in dit geval zeggen dat elk term $x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}$ die in de veelterm $\det(C_n)$ voorkomt graad $\frac{1}{2}(n-1)n$ heeft.

   (c) Bewijs dat voor elke paar (i, j) met $1 \leq i < j \leq n$ de veelterm $\det(C_n)$ deelbaar is door $x_i - x_j$. Hint: $x^m - y^m = (x - y) \sum_{k=0}^{m-1} x^{m-k-1} y^k$.

   (d) Toon (met behulp van de voorafgaande onderdelen) aan dat $\det(C_n)$ op een vermenigvuldiging van een constante na gelijk is aan

   $$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j).$$

   (e) Voor welke waarde van $x_1, x_2, \ldots x_n \in \mathbb{R}$ is C_n inverteerbaar? N.B. Je mag gebruiken dat de constante uit onderdeel (d) ongelijk aan nul is.

   Als je bovenstaande onderdelen niet kunt bewijzen voor algemene n, toon het dan aan voor $n = 3$.