Mathematisch Instituut, Faculteit Wiskunde en Informatica, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A−Eskwadraat.
Het college WISB121 werd in 2004/2005 gegeven door Jan Stienstra.

Lineaire Algebra, eerste deeltentamen (WISB121)
8 november 2004

Opgave 1

a) Neem de matrix $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ en bereken $A\,A^T$.

b) Bereken het uitproduct (=*cross product*) $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ van de vectoren $\mathbf{b} = (-3, 2, 5)$ en $\mathbf{c} = (3, 2, 1)$.

c) Neem de vectoren $\mathbf{b}$ en $\mathbf{c}$ als in onderdeel b. en de matrix A als in onderdeel a.. Laat zien dat voor de lengte (=*norm* = *magnitude*) van de vector $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ geldt

$$\| \mathbf{b} \times \mathbf{c} \|^2 = \det(A\,A^T)\,.$$

Opgave 2

Waarschuwing: deze opgave vergt enige concentratie en netheid bij het rekenwerk; bij juiste uitvoering blijven de getallen tijdens het rekenwerk heel schappelijk.

a) Los het volgende stelsel vergelijkingen op

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 5 \\ 3x_1 & - & 5x_2 & & & + & 6x_4 & = & 20 \\ 4x_1 & + & 7x_2 & + & 5x_3 & & & = & 15 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 5 \end{array}$$

b) Bereken $\quad \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 0 & 6 \\ 4 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

Opgave 3

We bekijken de volgende kolomvectoren in $\mathbb{R}^4$

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 17 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Wat wordt bedoeld met de vraag *"Zit de vector* $\mathbf{b}$ *in het opspansel (=*span*) van de vectoren* $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$*?"*

b) Geef een matrix A zo dat de vraag uit onderdeel a. gewoon neerkomt op *"Heeft de vergelijking* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *een oplossing* $\mathbf{x}$*?"*

c) Beantwoord nu de vraag *"Zit de gegeven vector* $\mathbf{b}$ *in het opspansel van de vectoren* $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$*?"*

Opgave 4

a) Bereken de determinant $\det A$ van de matrix $A = \begin{pmatrix} \lambda & 2 & 5 \\ 3 & \lambda & 5 \\ -3 & 2 & \lambda \end{pmatrix}$; hier is λ een reëel getal.

b) Geef alle reële getallen λ zo dat de matrix A uit onderdeel a. *niet* inverteerbaar is.

Opgave 5

Bereken de inverse van de matrix $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 5 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Opgave 6

Zij $\mathbf{x}$ een vector in $\mathbb{R}^2$ waarvan de lengte 5 is en die een hoek van $45°$ maakt met de vector $\mathbf{a} = (1, 7)$.

a) Bereken het inproduct (=*dot product*) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}$.

b) Geef alle vectoren $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ die aan de bovengenoemde voorwaarden voldoen.