Mathematisch Instituut, Faculteit Wiskunde en Informatica, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de TBC van A−Eskwadraat.
Het college WISB121 werd in 2004/2005 gegeven door J. Stienstra.
De uitwerking is samengesteld/gemaakt door Wouter Duivesteijn.

Uitwerking* Lineaire Algebra, deel 1 (WISB121) 8 november 2004

Noot van de auteur: In tegenstelling tot wat de voetnoot op deze pagina beweert, is deze uitwerking met het oog op het aankomende tentamen vrij snel in elkaar geflanst. Mocht je daarom denken dat er fouten in geslopen zijn, of is iets niet duidelijk, aarzel dan niet om me te mailen: `wouter@a-eskwadraat.nl`

Opgave 1

a) Neem de matrix $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ en bereken $A\,A^T$.

Uitwerking:

$$A^T = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{en dus :} \qquad A\,A^T = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$$

b) Bereken het uitprodukt (=*cross product*) $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ van de vektoren $\mathbf{b} = (-3, 2, 5)$ en $\mathbf{c} = (3, 2, 1)$.

Uitwerking:
$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = (-8, 18, -12)$

c) Neem de vektoren $\mathbf{b}$ en $\mathbf{c}$ als in onderdeel b. en de matrix A als in onderdeel a.. Laat zien dat voor de lengte (=*norm* = *magnitude*) van de vektor $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ geldt

$$\| \mathbf{b} \times \mathbf{c} \|^2 = \det(A\,A^T)\,.$$

Uitwerking:
Aan de ene kant hebben we:

$$\| \mathbf{b} \times \mathbf{c} \|^2 = \| (-8, 18, -12) \|^2 = \sqrt{(-8)^2 + 18^2 + (-12)^2}^{\,2} = (-8)^2 + 18^2 + (-12)^2 = 532$$

Aan de andere kant hebben we:

$$\det(A\,A^T) = \det \begin{pmatrix} 38 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix} = 38 \cdot 14 - 0 \cdot 0 = 532$$

*Deze uitwerkingen zijn met de grootste zorg gemaakt. In geval van fouten kan de TBC niet verantwoordelijk worden gesteld, maar wordt zij wel graag op de hoogte gesteld: `tbc@A-Eskwadraat.nl`

Opgave 2

Waarschuwing: deze opgave vergt enige concentratie en netheid bij het rekenwerk; bij juiste uitvoering blijven de getallen tijdens het rekenwerk heel schappelijk.

a) Los het volgende stelsel vergelijkingen op

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 5 \\ 3x_1 & - & 5x_2 & & & + & 6x_4 & = & 20 \\ 4x_1 & + & 7x_2 & + & 5x_3 & & & = & 15 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 5 \end{array}$$

Uitwerking: We schrijven het stelsel in augmented-matrixform:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & -5 & 0 & 6 & 20 \\ 4 & 7 & 5 & 0 & 15 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 15 & 9 & -8 & -5 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -36 & -8 & -80 \\ 0 & 0 & -7 & -1 & -15 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -36 & -8 & -80 \\ 0 & 0 & -7 & -1 & -15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -36 & -8 & -80 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{9} & \frac{5}{9} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -36 & 0 & -72 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{9} & \frac{5}{9} \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -36 & 0 & -72 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{9} & \frac{5}{9} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -36 & 0 & -72 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{9} & \frac{5}{9} \end{array}\right)$$

En dus vinden we $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 1$.

b) Bereken $\det \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 0 & 6 \\ 4 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Uitwerking:
We willen de determinant weten van de matrix waar we mee begonnen in vraag a. Vanwege de row-addition property van matrices (zie property 5 op bladzijde 258 van "Linear Algebra" van Fraleigh en Beauregard), is deze determinant gelijk aan de determinant van de matrix waar we mee *eindigden* in vraag a. Dus geldt:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 0 & 6 \\ 4 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{9} \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot -36 \cdot \frac{5}{9} = -20$$

Merk op dat dit verhaal niet opgaat als we tijdens vraag a een rij met een scalar vermenigvuldigen. In dat geval moet je ook de scalar-multiplication property van matrices gebruiken, die je kunt vinden op bladzijde 257 van "Linear Algebra" van Fraleigh en Beauregard.

Opgave 3

We bekijken de volgende kolomvektoren in $\mathbb{R}^4$

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 17 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Wat wordt bedoeld met de vraag " *Zit de vektor* $\mathbf{b}$ *in het opspansel (=*span*) van de vektoren* $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$*?* "

Uitwerking:
Is $\mathbf{b}$ een lineaire combinatie van $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$? Ofwel: zijn er scalars x_1, x_2, x_3 zodat $\mathbf{b} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3$?

b) Geef een matrix A zo dat de vraag uit onderdeel a. gewoon neerkomt op " *Heeft de vergelijking* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *een oplossing* $\mathbf{x}$*?* "

Uitwerking:
Dit is simpelweg de 4×3-matrix met als kolommen $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$.

c) Beantwoord nu de vraag " *Zit de gegeven vektor* $\mathbf{b}$ *in het opspansel van de vectoren* $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$*?* "

Uitwerking:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 8 \\ 2 & 5 & -6 & 17 \\ -1 & -2 & 1 & -8 \\ 0 & 5 & -8 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -8 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

De laatste rij van deze matrix komt overeen met de vergelijking $0 = -2$, dus is het stelsel strijdig; de gegeven vector $\mathbf{b}$ zit niet in het opspansel van de vectoren $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$.

Opgave 4

a) Bereken de determinant $\det A$ van de matrix $A = \begin{pmatrix} \lambda & 2 & 5 \\ 3 & \lambda & 5 \\ -3 & 2 & \lambda \end{pmatrix}$; hier is λ een reëel getal.

Uitwerking:

$$\det(A) \;=\; \lambda \cdot (\lambda \cdot \lambda - 5 \cdot 2) - 2 \cdot (3 \cdot \lambda - 5 \cdot -3) + 5 \cdot (3 \cdot 2 - \lambda \cdot -3) \;=\; \lambda^3 - \lambda$$

b) Geef alle reële getallen λ zo dat de matrix A uit onderdeel a. *niet* inverteerbaar is.

Uitwerking:
De matrix A is niet inverteerbaar als $\det(A) = 0^\dagger$. Dus moet $\lambda^3 - \lambda \;=\; \lambda \cdot (\lambda^2 - 1) \;=\; 0$. Dit is het geval wanneer $\lambda = 0, 1, \text{of } -1$.

† Deze stelling is in het collegejaar 2005/2006 geen tentamenstof voor het eerste deeltentamen

Opgave 5

Bereken de inverse van de matrix $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 5 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Uitwerking:
Het berekenen van de inverse van een matrix A gaat door de augmented matrix $(A|I)$ te vormen, en door gebruik te maken van de Gauss-Jordan method de matrix $(I|C)$ te verkrijgen; C is dan A^{-1}. Als je geen rekenfouten maakt levert dit procedé de volgende matrix op:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -\frac{7}{2} & \frac{19}{6} & \frac{5}{6} \\ 2 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Opgave 6

Zij $\mathbf{x}$ een vektor in $\mathbb{R}^2$ waarvan de lengte 5 is en die een hoek van 45° maakt met de vektor $\mathbf{a} = (1, 7)$.

a) Bereken het inprodukt (=*dot product*) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}$.

Uitwerking:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = \| \mathbf{x} \| \| \mathbf{a} \| \cos(\theta) = 5 \cdot \sqrt{50} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{5}{2}\sqrt{100} = 25$$

b) Geef alle vektoren $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ die aan de bovengenoemde voorwaarden voldoen.

Uitwerking: We zoeken dus alle vectoren (x_1, x_2) die voldoen aan twee voorwaarden. Ten eerste moet $\| (x_1, x_2) \| = 5$, dus $\sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2} = 5$, dus $x_1{}^2 + x_2{}^2 = 25$.
Ten tweede moet de hoek tussen (x_1, x_2) en $(1, 7)$ gelijk zijn aan 45°. Gebruik makend van de relatie tussen inproduct, lengte, en hoek, die we ook in de vorige opgave hebben gebruikt, krijgen we $x_1 + 7x_2 = 25$, wat we kunnen omschrijven naar $x_1 = 25 - 7x_2$. Vullen we deze vergelijking in in de vergelijking die we uit de eerste eis kregen, dan krijgen we

$$(25 - 7x_2)^2 - 7x_2{}^2 = 25$$

Dit is een kwadratische vergelijking in één onbekende, die je met de welbekende abc-formule kunt oplossen. Doen we dat, dan krijgen we $x_2 = 3$ of $x_2 = 4$. Vullen we deze waarden in in de vergelijking die we in de tweede eis krijgen, dan krijgen we de vectoren $x = (4, 3)$ en $x = (-3, 4)$. Dit zijn alle gevraagde vectoren.