Mathematisch Instituut, Faculteit Wiskunde en Informatica, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{BC}$ van A−Eskwadraat.
Het college WISB121 werd in 2004/2005 gegeven door Jan Stienstra.

Lineaire Algebra, tweede deeltentamen (WISB121)
31 januari 2005

Opgave 1

a) Geef een basis voor de kern (= nullspace) van de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -5 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

N.B. Je moet hier ook echt laten zien dat dit een basis is.

b) Bepaal de rang (= rank) van A.

Opgave 2

a) Bepaal de eigenwaarden van de matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Bepaal bij elke eigenwaarde de eigenvektoren.

c) Geef een inverteerbare matrix S en een diagonaalmatrix D zodat $B = SDS^{-1}$. Laat zien dat de S die je geeft ook echt inverteerbaar is.

d) Laat zien dat $B^9 = B$.

e) Bepaal de oplossing $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ van het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{array}{rcl} x_1' & = & x_1 - x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\ x_2' & = & x_1 - x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ x_3' & = & -x_1 + x_2 \end{array} ,$$

die ook nog voldoet aan de voorwaarde $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Opgave 3

In deze opgave is F de lineaire ruimte van alle funkties op $\mathbb{R}$ met waarden in $\mathbb{R}$.

a) Is de verzameling, bestaande uit die funkties f die voldoen aan $|f(x)| \le 1 + |x|$, een lineaire deelruimte van F? Geef een duidelijke motivering voor je antwoord!

b) Zijn de drie funkties x^2, $|x|$ en $1 - \cos(\pi x)$ lineair onafhankelijk? Geef een duidelijke motivering voor je antwoord!

c) Neem $V = \text{Span}\{x^2, |x|, 1 - \cos(\pi x)\}$. Zij W de verzameling, bestaande uit die funkties $f \in V$ die voldoen aan $f(1) = 0$.
Laat zien dat W een lineaire deelruimte is van V.

d) Geef een basis voor de lineaire ruimte W.

Opgave 4

In deze opgave is P_2 de lineaire ruimte van veeltermen met graad ≤ 2 (=polynomials of degree at most 2) met coëfficiënten in $\mathbb{R}$. We bekijken de afbeelding $T : \mathsf{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ gedefinieerd door $T(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{pmatrix}$, hier is $p(n)$ de waarde van de veelterm(-funktie) p in het punt n.

a) Laat zien dat T een lineaire afbeelding (= linear transformation) is.

b) In P_2 nemen we de basis $(\,1,\, x,\, x^2\,)$. In $\mathbb{R}^3$ nemen we de basis $(\,e_1, e_2, e_3\,)$ met $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Je hoeft *niet* te laten zien dat dit bases zijn.
Bepaal de matrix van T ten opzichte van deze bases.

c) Bepaal een veelterm p die voldoet aan $T(p) = e_1$.

d) Bepaal $\ker(T)$.

e) Bewijs dat T een isomorfisme is.
N.B. isomorfisme = isomorphism = inverteerbaar = invertible = bijektief = one-to-one and onto.