Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A−Eskwadraat.
Het college WISB121 werd in 2005/2006 gegeven door Jan Stienstra.

Lineaire Algebra, eerste deeltentamen (WISB121)
8 november 2005

- Schrijf op ieder vel dat je inlevert je naam en je studentnummer. Schrijf op het eerste vel ook het nummer van je praktikumgroep of de naam van je praktikumleid(st)er (Benno van den Berg, Igor Grubisic, Charlene Kalle, Oliver Lorscheid, Vincent van der Noort, Joost Rommes, Rogier Swierstra , Ittay Weiss) .
- Laat bij elke opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- **Succes!**

Opgave 1

Bereken de determinant van de matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Opgave 2

Neem de twee (rij-)vectoren $\vec{a} = (-7, 6, 1)$ en $\vec{b} = (1, -1, 3)$ in $\mathbb{R}^3$.

a) Bereken het uitproduct (= cross product) $\vec{a} \times \vec{b}$.

b) Bereken de oppervlakte van de driehoek in $\mathbb{R}^3$ met hoekpunten $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{a} + \vec{b}$.

Opgave 3

a) Geef alle oplossingen van het volgende stelsel lineaire vergelijkingen

$$\begin{array}{rrrrcl} x_1 & +2x_2 & +4x_3 & -3x_4 & = & 1 \\ x_1 & +3x_2 & -5x_3 & -7x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & +5x_2 & -x_3 & -10x_4 & = & 1 \end{array}$$

b) Geef een basis voor de rijenruimte (= row space) van de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & -5 & -7 \\ 2 & 5 & -1 & -10 \end{pmatrix}.$$

c) Geef een basis voor de kolommenruimte (= column space) van de matrix A.

d) Geef een basis voor de nulruimte (= nullspace) van de matrix A.

e) Wat is de rang (= rank) van de matrix A?

Opgave 4

We bekijken de volgende kolomvectoren in $\mathbb{R}^4$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Zit de vector $\vec{v}_4$ in het opspansel van de vectoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$?

b) Zijn de vectoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, $\vec{v}_4$ lineair onafhankelijk?

Opgave 5

Laat zien dat de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ inverteerbaar is en bereken de inverse matrix A^{-1}.

Opgave 6

Gegeven zijn de (rij-)vectoren $\vec{a} = (1, 0, 1)$ en $\vec{b} = (0, 1, 1)$ in $\mathbb{R}^3$.

a) Bepaal de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

b) Bepaal alle vectoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ met lengte (= norm = magnitude) gelijk aan 1, die met zowel $\vec{a}$ als $\vec{b}$ een hoek (= angle) van 45° (= $\frac{1}{4}\pi$) maken.

Opgave 7

Voor twee vectoren $\vec{u}$ en $\vec{v}$ in $\mathbb{R}^{125}$ is gegeven

$$\| \vec{u} \| = 3, \qquad \| \vec{v} \| = 1, \qquad \vec{u} \cdot \vec{v} = -\frac{1}{3}.$$

Bereken $\| \vec{u} + 3\,\vec{v} \|$.

N.B. $\| \vec{u} \|$ *is de lengte (= norm = magnitude) van de vector* $\vec{u}$ *en* $\vec{u} \cdot \vec{v}$ *is het inproduct (= dot product) van* $\vec{u}$ *en* $\vec{v}$.