DEPARTEMENT WISKUNDE, FACULTEIT BÈTAWETENSCHAPPEN, UU.
IN ELEKTRONISCHE VORM BESCHIKBAAR GEMAAKT DOOR DE $\mathcal{TBC}$ VAN A−Eskwadraat.
HET COLLEGE WISB121 WERD IN 2005/2006 GEGEVEN DOOR JAN STIENSTRA.

Lineaire Algebra, tweede deeltentamen (WISB121)
31 januari 2006

Opgave 1

In deze opgave is $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ -12 & 1 & -12 \\ -6 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Laat zien dat $\mathbf{v}$ een eigenvector is van B.

b) Bepaal alle eigenwaarden van B.

c) Geef een basis van $\mathbb{R}^3$, die bestaat uit eigenvektoren van B. Bewijs dat dit ook echt een basis is.

d) Bepaal alle oplossingen $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ van het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{array}{rcrrr} x_1' & = & x_1 & -3\,x_2 & -3\,x_3 \\ x_2' & = & -12\,x_1 & +x_2 & -12\,x_3 \\ x_3' & = & -6\,x_1 & +3\,x_2 & -2\,x_3 \end{array}$$

e) Welke van de in d) gevonden oplossingen voldoet aan $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$?

Opgave 2

Van een 2×2-matrix A is gegeven dat de vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ een eigenvector is bij de eigenwaarde 2 en dat $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ een eigenvector is bij de eigenwaarde -3.

a) Is de matrix A diagonaliseerbaar? Geef een duidelijke motivering voor je antwoord!

b) Bereken de matrix A (t.o.v. de standaardbasis van $\mathbb{R}^2$).

Opgave 3

Bereken de eigenwaarden in $\mathbb{C}$ en de eigenvectoren in $\mathbb{C}^2$ van de matrix $\begin{pmatrix} 1 & -2i \\ 2i & 1 \end{pmatrix}$.

Opgave 4

In deze opgave is F de lineaire ruimte van alle functies op $\mathbb{R}$ met waarden in $\mathbb{R}$. Neem de functies e^x, $\sin x$ en $\cos x$. Zij $W = \mathrm{Span}(e^x, \sin x, \cos x)$.

a) Laat zien dat de functies e^x, $\sin x$, $\cos x$ een basis vormen van W.

b) Laat zien dat voor elke $f \in W$ geldt $f' + 2f \in W$; hier is f' de afgeleide van de functie f.

c) Definieer de afbeelding $T : W \to W$ door $T(f) = f' + 2f$.
Laat zien dat T een lineaire afbeelding is.

d) Geef de matrix van de lineaire afbeelding $T : W \to W$ t.o.v. de (geordende) basis $(e^x,\ \sin x,\ \cos x)$.

Opgave 5

In deze opgave is F de lineaire ruimte van alle functies op $\mathbb{R}$ met waarden in $\mathbb{R}$.

a) Is de verzameling, bestaande uit die functies f die voldoen aan $f(x) \leq 1$ voor elke $x \in \mathbb{R}$, een lineaire deelruimte van F? Geef een duidelijke motivering voor je antwoord!

b) Zijn de drie functies x, $\cos x$ en $x \cos x$ lineair onafhankelijk? Geef een duidelijke motivering voor je antwoord!

c) Neem $V = \text{Span}\{x,\ \cos x,\ x\cos x\}$. Zij U de verzameling, bestaande uit die functies $f \in V$ die voldoen aan $f(\pi) = 0$.
Laat zien dat U een lineaire deelruimte is van V.

d) Bepaal de dimensie van de lineaire ruimte U.