Mathematisch Instituut, Faculteit Wiskunde en Informatica, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A−Eskwadraat.
Het college WISB121 werd in 2003/2004 gegeven door F. Beukers.

Lineaire Algebra (WISB121)
11 november 2003

Opgave 1

Gegeven zijn de punten $A = (-1, 2, 3)$, $B = (3, 1, 1)$, $C = (1, -2, 2)$.

a) Laat zien dat A, B, C niet op één lijn liggen en bepaal een vergelijking voor het vlak door A, B, C.

b) Zij l de rechte lijn door A en B. Bepaal de coördinaten van het punt D op de lijn l, waarvan de afstand tot het punt $(0, 0 - 1)$ minimaal is.

c) Bewijs dat van de driehoek $\triangle ABC$ twee zijden dezelfde lengte hebben, en dat de hoek tussen die zijden groter dan $\pi/2$ is. Bereken de oppervlak van $\triangle ABC$.

Opgave 2

Zij V het opspansel van de volgende kolomvectoren,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Bepaal een basis van V.

b) Bepaal alle lineaire combinaties van de 5 bovengenoemde vectoren die de nulvectoren opleveren (lineaire relaties).

c) Voor welke waarde(n) van α is de kolomvector $(-4, 0, 1, \alpha)^t$ bevat in V?

Opgave 3

Zij V de deelruimte van $\mathbb{R}^3$ opgespannen door de vector $(1, 2, 2)^t$. zij $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de afbeelding die aan een vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ de loodrechte projectie van $\mathbf{x}$ op V toekent.

a) Bepaal het beeld van een willekeurige vector $(x_1, x_2, x_3)^t$ en leg uit waarom P een lineaire afbeelding is. Bepaal tevens de matrix van P.

b) Bepaal de kern en het beeld van P.

c) Bewijs dat voor elk positief geheel getal n geldt: $P^n = P$.

Opgave 4

Zij l en m een tweetal rechte lijnen in $\mathbb{R}^3$ met parametervoorstellingen $\mathbf{p} + \lambda\mathbf{a}$ en $\mathbf{q} + \mu\mathbf{b}$, waarin $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$.

a) Stel dat l en m elkaar snijden. Bewijs dat de determinant

$$\triangle(\mathbf{p} - \mathbf{q}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$$

nul is.

b) Stel nu dat $\triangle(\mathbf{p}-\mathbf{q},\mathbf{a},\mathbf{b})=0$. Volgt hieruit dat de lijnen elkaar snijden? Zo ja, laat dit zien, zo nee, geef een voorbeeld waarbij de lijnen elkaar niet snijden.

c) **Bonusopgave**
Stel dat l en m elkaar snijden en dat $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$. Laat zien dat het snijpunt gegeven wordt door de waarde

$$\lambda=\frac{((\mathbf{q}-\mathbf{p})\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}\times\mathbf{b})}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2}$$

in de parametervoorstelling $\mathbf{p}+\lambda\mathbf{a}$.