Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de TBC van A–Eskwadraat.
Het college WISB121 werd in 2008-2009 gegeven door Prof. Dr. I. Moerdijk.

Uitwerking[1] Tweede deeltentamen Lineaire Algebra (WISB121)
12 januari 2009

Opgave 1.

a) Om te weten voor welke waarden van a geldt dat $\det(A) = 0$, moet eerst de determinant van A bepaald worden:

$$\det(A) = \left| \begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 2 & a & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \right| = 1 \cdot (9 \cdot a - 26) - 3 \cdot (18 - 18) + a \cdot (12 - 3 \cdot a) = -3a^2 + 21a - 36$$

Als nu $\det(A) = 0$, dan geldt dus dat $-3a^2 + 21a - 36 = 0$, dus $a^2 - 7a + 12 = 0$. Oplossingen hiervoor zijn: $a = 3$, $a = 4$. Dus $\det(A) = 0$ als $a = 3$ of $a = 4$.

b) Een matrix is inverteerbaar als de determinant van de matrix ongelijk nul is. Voor $a = 2$ is dit waar (zie vraag a), dus is A inverteerbaar. Berekenen van de inverse:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 6 & 3 & -4 \\ 0 & -3 & 3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & \frac{5}{2} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{array}\right).$$

Dan is dus $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & \frac{5}{2} & -\frac{7}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Opgave 2.

a) Om de eigenwaarden te berekenen lossen we $|B - \lambda I| = 0$ op voor λ. Expansie over de derde rij levert $(5 - \lambda)((3 - \lambda)^2 - 4) = (5 - \lambda)(\lambda - 5)(\lambda - 1) = 0$. Dus de eigenwaarden zijn 1 en 5.

b) Allereerst merken we op dat er drie eigenvectoren moeten zijn, omdat B symmetrisch is. De eigenvectoren worden berekend door het oplossen van $B - \lambda I = 0$. Voor $\lambda = 1$ betekent dit het oplossen van $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Oplossen levert de eigenvector $\mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

[1] Deze uitwerkingen zijn met de grootste zorg gemaakt. In geval van fouten kan de TBC niet verantwoordelijk worden gesteld, maar wordt zij wel graag op de hoogte gesteld: tbc@a-eskwadraat.nl

Voor $\lambda = 5$ moeten we oplossen: $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Oplossen hiervan geeft twee eigenvectoren: $\mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\psi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Opgave 3.

a) De nulruimte is de deelruimte van V_3 die gegeven wordt door alle elementen die naar 0 worden afgebeeld door δ. Dat zijn alle polynomen van graad 1 of lager. Een basis hiervoor is bijvoorbeeld $1, x$. Merk op dat voor $n = 0$ heel V_0 in de nulruimte zit en dan 1 een voorbeeld van een basis is.

b) De rang van een operator is de dimensie van haar beeldruimte. De beeldruimte van δ bestaat uit alle polynomen van graad $n - 2$. Deze ruimte heeft dimensie $n - 1$. Met uitzondering voor $n = 0, 1$, dan is de rang van δ gelijk aan 0.

c) V_3 bestaat uit alle polynomen van graad 0 tot graad 3, een mogelijke basis hiervoor is $1, x, x^2, x^3$. De makkelijkste manier om de bijbehorende matrix te berekenen is door het beeld van de basisvectoren te berekenen. Je vindt voor deze basis dan de volgende matrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) Het nemen van de tweede afgeleide is hetzelfde als twee keer de eerste afgeleiden nemen. Laat E de matrix zijn voor het nemen van de eerste afgeleide, dan is $D = EE$.

Opgave 4.

a) Vector $v_1 = (1, -2)$ ligt op lijn l. Vector $v_2 = (2, 1)$ staat loodrecht op lijn l. Dan is dus $\sigma(v_1) = v_1$, $\sigma(v_2) = -v_2$ en vormen v_1, v_2 een basis van eigenvectoren van $\mathbb{R}^2$. (Ze zijn lineair onafhankelijk, aangezien ze loodrecht op elkaar staan. Een andere reden dat ze lineair onafhankelijk zijn, is dat ze de eigenvectoren van verschillende eigenwaarden zijn. Lineaire onafhankelijkheid kan ook direct gecontroleerd worden).

b) De matrix van σ ten opzichte van een basis van eigenvectoren, is $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

c) De matrix van σ ten opzichte van de standaardbasis is $B = CAC^{-1}$, waarbij $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ de matrix is die de bases verwisselt. Eerst moet C^{-1} berekend worden:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Dan geldt dat:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

d) De determinant van σ is -1. Als er een $\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zou zijn, zodanig dat $\sigma = \tau \circ \tau$, dan geldt dat $\det(\sigma) = \det(\tau)^2 \geq 0$, wat niet het geval is.

Opgave 5.

Laat $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een inproductruimte zijn.

a) De *som* $U+W$ van een willekeurig paar lineaire deelruimtes U en W van V is gedefinieerd door:

$$U + W = \{v \in V | \text{ er is een } u \in U \text{ en een } w \in W \text{ zodat } v = u + w\}$$

Bewijs dat $U + W$ ook een lineaire deelruimte van V is.

$U + W$ is een lineaire deelruimte van V als hij niet leeg is, en gesloten is onder sommen en scalaire producten. $U + W$ niet leeg is triviaal: omdat $0 \in U$ en $0 \in W$, geldt $0 \in U + W$. Laat x en $y \in U + W$, dan zijn er x_1 en $y_1 \in U$, en x_2 en $y_2 \in W$ zodanig dat $x = x_1 + x_2$ en $y = y_1 + y_2$. Maar $x_1 + y_1 \in U$ en $x_2 + y_2 \in W$, omdat U en W lineaire deelruimten zijn. $x + y = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)$, en daarom $x + y \in U + W$. Laat $z \in U + W$, dan zijn er $z_1 \in U$ en $z_2 \in W$, zodanig dat $z = z_1 + z_2$. Voor $\lambda \in \mathbb{R}$ willekeurig, geldt $\lambda z_1 \in U$ en $\lambda z_2 \in W$, omdat U en W lineaire deelruimten zijn. Maar $\lambda z = \lambda z_1 + \lambda z_2$ en dus $\lambda z \in U + W$. We hebben vastgesteld dat $U + W$ gesloten is onder sommen en scalaire producten, dus is $U + W$ een lineaire deelruimte van V. *6 punten. Slecht leesbaar of onvolledig opgeschreven: 1 punt aftrek.*

b) Het *orthogonaal complement* $U^\perp$ van een lineaire deelruimte U van V is gedefinieerd door:

$$U^\perp = \{v \in V | \text{ voor alle } u \in U \text{ geldt } \langle u, v \rangle = 0\}$$

Bewijs ook van $U^\perp$ dat het een lineaire deelruimte is.

Nu moeten we aantonen dat $U^\perp$ niet leeg is en gesloten is onder sommen en producten. Omdat $\langle u, 0 \rangle = 0$ voor alle $u \in U$ geldt vanzelf dat $0 \in U^\perp$. Laat x en $y \in U^\perp$. Dat is precies het geval als $\langle u, x \rangle = \langle u, y \rangle = 0$ voor alle $u \in U$. Maar dan $\langle u, x+y \rangle = \langle u, x \rangle + \langle u, y \rangle = 0$ voor alle $u \in U$, en dus $x + y \in U^\perp$. Laat $z \in U^\perp$ en $\lambda \in \mathbb{R}$ willekeurig. Nu geldt $\langle u, \lambda z \rangle = \lambda \langle u, z \rangle = 0$ voor alle $u \in U$, en dus $\lambda z \in U^\perp$. Hiermee is ook van $U^\perp$ vastgesteld, dat het een lineaire deelruimte van V is. *6 punten. Slecht leesbaar of onvolledig opgeschreven: 1 punt aftrek.*

c) Bewijs dat $U^\perp \cap W^\perp = (U + W)^\perp$ voor elk willekeurig paar lineaire deelruimtes U en W van V.

We moeten bewijzen dat alle $x \in U^\perp \cap W^\perp$ element zijn van $(U + W)^\perp$ et vice versa. Laat $x \in U^\perp \cap W^\perp$, dan $x \in U^\perp$ en $x \in W^\perp$, wat precies het geval is als $\langle u, x \rangle = \langle w, x \rangle = 0$ voor alle $u \in U$ en $w \in W$. Als $v \in U + W$ geldt echter dat er $u \in U$ en $w \in W$ zijn, zodanig dat $v = u + w$. In dat geval geldt $\langle v, x \rangle = \langle u, x \rangle + \langle w, x \rangle = 0$. Aangezien dit voor alle $v \in U + W$ geldt, volgt echter dat $x \in (U + W)^\perp$.

Laat $y \in (U + W)^\perp$. Nu geldt voor alle $u \in U$ en $w \in W$, dat $\langle u + w, x \rangle = 0$. Ook als $u = 0$, en dan volgt dat $\langle u + w, x \rangle = \langle w, x \rangle = 0$ voor $w \in W$ willekeurig. En als $w = 0$, dan $\langle u + w, x \rangle = \langle u, x \rangle = 0$ voor $u \in U$ willekeurig. Hieruit volgt dat $y \in U^\perp$ en $W^\perp$, en dus in $U^\perp \cap W^\perp$.

Nu hebben we aangetoond dat $U^\perp \cap W^\perp \subset (U + W)^\perp$ en $(U + W)^\perp \subset U^\perp \cap W^\perp$, en dus $U^\perp \cap W^\perp = (U + W)^\perp$.

Opmerkingen: Inproducten zijn niet strict positief: $\langle (1, 0)^T, (-1, 0)^T \rangle = -1$. Ook is het niet altijd waar dat als $\langle u, v \rangle = -\langle w, v \rangle$, dan $u = -w$: $\langle (1, 0)^T, (0, 1)^T \rangle = -\langle (1, 0)^T, (0, 0)^T \rangle$, maar $(0, 1)^T \neq (0, 0)^T$.

3 punten voor $U^\perp \cap W^\perp \subset (U + W)^\perp$ en 3 punten voor $(U + W)^\perp \subset U^\perp \cap W^\perp$. Slecht leesbaar of onvolledig opgeschreven: 1 punt aftrek.