Tentamen Infinitesimaalrekening A

5 november 2009. Uitwerkingen.

N.B. de uitwerkingen hierna zijn *mogelijke* uitwerkingen, maar niet de enig mogelijke!

Opgave 1. Niet alle functies $f : A \to B$ zijn surjectief, definieer bijvoorbeeld f door $f(x) = 3$ voor alle $x \in A$, dan komt 4 niet voor in het beeld. Er zijn geen functies $g : A \to B$ die injectief zijn. Want als g injectief is, dan moeten er minstens zes verschillende beelden zijn, namelijk $g(1), \ldots g(6)$, en zoveel elementen zitten er niet in B.

Opgave 2. De eerste limiet kun je met de substitutiestelling doen (stel $y = x - \frac{\pi}{2}$): $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{y\to 0} \frac{\cos(y - \frac{\pi}{2})}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{-\sin y}{y} = -\cos(0) = -1$. Dit zie je b.v. door de limiet als afgeleide te herkennen.

De tweede limiet: omdat voor elke x geldt $-1 \leq \cos x \leq 1$ geldt voor elke $x > \frac{\pi}{2}$

$\frac{-1}{x - \frac{\pi}{2}} \leq \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} \leq \frac{1}{x - \frac{\pi}{2}}$. Omdat $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{y} = 0$ en dus ook $\lim_{x\to\infty} \frac{-1}{x - \frac{\pi}{2}} = -0 = 0$ volgt $\lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = 0$.

Opgave 3. De integraal $\int_0^{\pi/2} \cos(x)\sqrt{1 - \sin(x)}\; dx$. kan gemakkelijk door de substitutie $y = \sin x$, $(dy/dx = \cos x)$ worden herschreven als

$\int_0^1 \sqrt{1-y}\, dy$. Een primitieve van $y \mapsto (1-y)^{\frac{1}{2}}$ is

- $\frac{2}{3}(1-y)^{\frac{3}{2}}$. De waarde van de integraal is daarom $-\frac{2}{3} \cdot (1-1)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}(1-0)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$.

Opgave 4. Schrijf $f(x) = \arccos(x)$ dan is de lineaire benadering in het steunpunt 0 de functie $x \mapsto f(0) + xf'(0)$. Nu is $f(0) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$ en $\frac{d\arccos x}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ zodat $f'(0) = -1$. De lineaire benadering is daarom $x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$. (Vergelijk de grafiek van arccos in het diktaat).

Opgave 5. Een primitieve van de functie $f(x) = (x-1)^2 e^{2x}$. kan gevonden worden door $(x-1)^2$ uit te werken en functies partieel te integreren. Om te laten zien dat verschillende uitwerkingen mogelijk zijn geven we hier een andere mbv de substitutiestelling (stel $x = y+1, y = \frac{z}{2}$). Nu worden de berekeningen makkelijker: $\int (x-1)^2 e^{2x} dx = \int y^2 e^{2y+2} dy = e^2 \int y^2 e^{2y} dy = e^2 \int \frac{z^2}{4} e^z \frac{1}{2} dz = \frac{e^2}{8} \int z^2 e^z dz$. Twee keer partieel integreren levert

$\int z^2 e^z = z^2 e^z - \int 2ze^z dz = z^2 e^z - 2ze^z + 2e^z.$

Als uitkomst van de primitieve krijgen we

$\frac{e^2}{8}[(2x-2)^2 - 2(2x-2) + 2]e^{2x-2} = \frac{1}{4}[2x^2 - 6x + 5]e^{2x}.$

Opgave 6. Stel $f(x) = \sqrt[3]{x}$ dan $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$, en $f'''(x) = +\frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}}$.

De tweede orde Taylorveelterm in het steunpunt 1 is

$f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2 = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2$. Door invullen van $x = \frac{3}{2}$ vinden we de benadering $\sqrt[3]{\frac{3}{2}} \approx 1 + \frac{1}{6} - \frac{1}{36}$.

Volgens de stelling van Taylor is de fout in deze benadering $\frac{1}{3!}f'''(t)(x-1)^3$ met $x = 1,5$ en t een onbekend getal tussen 1 en 1,5.

De fout wordt dus $\dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{10}{27} t^{-\frac{8}{3}} \dfrac{1}{8}$. Nu is $t \geq 1$ dus $|t^{-\frac{8}{3}} \leq 1|$ en dus is de fout in absolute waarde kleiner dan $\dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{10}{27} \cdot \dfrac{1}{8} = \dfrac{10}{27 \times 48} < \dfrac{10}{25 \times 40} = \dfrac{1}{100}$.

Opmerking, die je natuurlijk op het tentamen niet hoefde te maken: $1 + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = 1,13888\ldots$, $\sqrt[3]{\frac{3}{2}} = 1,14471\ldots$, het verschil is $0,00581\ldots$.

Opgave 7. Met de $\alpha\beta\gamma$-formule uit het diktaat krijgen we

$$z_{1,2} = \frac{4 + 2i + \pm\sqrt{(4+2i)^2 - 4(6+8i)}}{2} = 2 + i + \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{-12 - 16i}.$$

Hierbij bedoelen we met $\pm\sqrt{-12-16i}$ de twee complexe getallen waarvan het kwadraat gelijk is aan $-12 - 16i$. Stel een van deze getallen is $a + bi$. Dan moet dus $(a+bi)^2 = -12 - 16i$ zodat $a^2 - b^2 = -12$ en $2abi = -16i$ dus $ab = -8$. Door proberen kun je inzien dat $a = 2, b = -4$ of $a = -2, b = 4$ voldoen (en dat moeten dus ook de enige zijn, omdat de vergelijking $w^2 = c$ voor complexe $c \neq 0$ altijd precies twee complexe oplossingen heeft), Dat kun je ook zo inzien: Als we $b = \frac{-8}{a}$ invullen in $a^2 - b^2 = -12$ dan krijgen we $a^2 - \frac{64}{a^2} = -12$ oftewel $a^4 + 12a^2 - 64 = 0$.

Deze vergelijking (in a^2) heeft wortels $a^2 = \frac{1}{2}(-12 \pm \sqrt{144+256}) = \frac{1}{2}(-12 \pm 20)$. Omdat $a^2 \geq 0$ moet zijn (immers a is een reëel getal) krijgen we $a^2 = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$ dus $a = 2$ (dan $b = -4$) en $a = -2$ (dan $b = 4$) Dus

$z = 2 + i \pm \frac{1}{2}(2 - 4i)$. De twee oplossingen zijn dus

$z_1 = 3 - i$ en $z_2 = 1 + 3i$. Controle: $z_1^2 - (4+2i)z_1 + (6+8i) = 9 - 6i - 1 - 12 + 4i - 6i - 2 + (6+8i) = 0 + 0i$, klopt, en $z_2^2 - (4+2i)z_2 + (6+8i) = 1 + 6i - 9 - 4 - 12i - 2i + 6 + (6+8i) = 0 + 0i$, klopt.

Opgave 8. De limiet kan bijvoorbeeld bepaald worden door Taylorveeltermen met steunpunt 0 te gebruiken:

Als $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ dan $f'(x) = -x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ en $f''(x) = -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$ dus $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$. Zo vinden we $\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + R_2(x)$ met $\lim_{x\to 0} \frac{R_2(x)}{x^2} = 0$. Verder geldt

$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + r_2(x)$ met $\lim_{x\to 0} \frac{r_2(x)}{x^2} = 0$.

Dit invullen levert $\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{1-\cos x} = \dfrac{\frac{1}{2}x^2 - R_2(x)}{\frac{1}{2}x^2 - r_2(x)} = \dfrac{\frac{1}{2} - \frac{R_2(x)}{x^2}}{\frac{1}{2} - \frac{r_2(x)}{x^2}}$. Als we nu de limiet nemen voor $x \to 0$ komt er $\frac{\frac{1}{2}-0}{\frac{1}{2}-0} = 1$.

Opgave 9. We vinden door proberen de particuliere oplossing $f(x) = 1$. Daarna lossen we de homogene differentiaalvergelijking $g''(x) - 4g'(x) + 5g(x) = 0$ op: we bepalen de oplossingen van $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$, deze zijn $\lambda = 2 \pm i$. Dit levert de algemene homogene oplossing $g(x) = c_1 e^{2x}\cos x + c_2 e^{2x}\sin x$. De algemene oplossing van de inhomogene vergelijking is dus $f(x) = 1 + c_1 e^{2x}\cos x + c_2 e^{2x}\sin x$. Nu geldt $f(0) = 1 + c_1 = 0$ en $f'(x) = c_1(2e^{2x}\cos x - e^{2x}\sin x) + c_2(2e^{2x}\sin x + e^{2x}\cos x)$ dus $f'(0) = 2c_1 + c_2 = 1$ We vinden nu $c_1 = -1$ en $c_2 = 3$. De gevraagde oplossing is dus $f(x) = 1 - e^{2x}\cos x + 3e^{2x}\sin x$.

Opgave 10. We lossen de vergelijking op door scheiden van variabelen: $\dfrac{dy}{dx} = -y^{\frac{4}{3}}$ levert

$\int -y^{-\frac{4}{3}} dy = \int dx$, en hieruit krijgen we

$3y^{-\frac{1}{3}} = x + c$ voor zekere constante c. Dit levert $y^{\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{x+c}$ dus $y = \dfrac{27}{(x+c)^3}$ voor zekere constante c.

Even controleren: $dy/dx = \dfrac{-81}{(x+c)^4}$ en inderdaad $-(\dfrac{27}{(x+c)^3})^{\frac{4}{3}} = \dfrac{-81}{(x+c)^4}$.

Nu moeten de functies $f(x) = \dfrac{-81}{(x+c)^4}$ nog gedefinieerd zijn op $(0, \infty)$ en dat betekent dat $c \geq 0$ moet zijn.

Bonusopgave: Opgave 11. Hiervan geven we uiteraard geen uitwerking.