Tentamen Infinitesimaalrekening A

10 november 2011, 13.30 – 16.30 uur

- Maak de opgaven op het uitgereikte papier en vul op elk blad dat je inlevert je naam en studentnummer in.
- Zet op het eerste blad het nummer van je groep. Nummers van werkcollegegroepen en namen van werkcollegebegeleiders en studentassistenten:
  1A (BBL 065) Wilfred de Graaf, Kasper Dokter, Tom Schotel.
  1B (Minnaert 207) Viktor Blåsjö, Abdelhak Chahid Mohamed.
  2 (Wisk 611, Minnaert 019) Sanjay Ramawadh, Lars van den Berg.
  3 (BBL 071) Henk Hietbrink, Sjaak van Diepen.
  4 (BBL 075) Jan van Zweeden, Johnson Leow.
  5 (Minnaert 012/ 205) Arjen Baarsma, Julian Lyczak.
- Geef niet alleen het antwoord, maar laat ook zien hoe je aan dat antwoord komt.
- Alle opgaven tellen even zwaar. Je hoeft alleen de eerste acht opgaven te maken, deze tellen elk voor tien punten. Het tentamencijfer is het totaal aantal punten gedeeld door 8. Met de negende opgave (bonusopgave) kun je maximaal tien punten extra verdienen, met dien verstande dat het totaalcijfer voor het tentamen nooit hoger dan 10 kan zijn.
- Op dit tentamen mogen geen rekenapparaten gebruikt worden, en ook geen boeken, dictaten of eigen aantekeningen.
- Veel succes!

Opgave 1. Bepaal alle tweemaal differentieerbare functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zodat $f''(x) + 8f'(x) + 16f(x) = 2x$.

Opgave 2. Primitiveer de functies $f, g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$:

$f(x) = x\sqrt{x+1}$ en $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$.

Z.O.Z.!!!!!!!!

Opgave 3 We beschouwen $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x) = \dfrac{\cosh x - 1}{x \log(x + 1)}$

en de limieten $\lim_{x \to 0} f(x)$ en $\lim_{x \to \infty} f(x)$.

Ga van elk van beide limieten na of ze bestaan. Als ze bestaan, bepaal ze en laat zien dat je antwoord correct is. Als ze niet bestaan, laat zien waarom niet.

Opgave 4. Bepaal met behulp van een derde-orde Taylorveelterm een rationaal getal y dat een benadering is in vijf decimalen nauwkeurig van $\cos(\frac{1}{10})$, dat wil zeggen zodat

$\left| y - \cos\left(\dfrac{1}{10}\right) \right| < \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{10^5}$. Laat ook zien dat y de gevraagde nauwkeurigheid heeft.

Opgave 5. Bepaal alle complexe getallen z die voldoen aan $z(z - 1) = 1 + 3i$. Schrijf de getallen in de vorm $a + bi$ waarbij a en b reële getallen zijn.

Opgave 6. We onderzoeken de bewering: Als $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een oneven functie is die surjectief is, is f ook injectief.

Is deze bewering waar of onwaar? Als hij waar is, toon dat dan aan; als hij onwaar is, geef dan een tegenvoorbeeld (dat wil zeggen een functievoorschrift; een plaatje is niet voldoende).

Opgave 7. Bepaal een differentieerbare functie $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ die voldoet aan de differentiaalvergelijking $f'(x) = \dfrac{f(x)}{2x + 1}$ en zodat $f(1) = 1$.

Opgave 8. Bereken $I = \displaystyle\int_2^3 \frac{1}{(x - 1)(x - 4)}\, dx$.

Mocht dit niet lukken, laat dan met een eenvoudige Riemannsom zien dat $I < -\frac{4}{9}$. (hiervoor krijg je 3 punten).

Bonusopgave: Opgave 9. Schat hoeveel kilometer men vanuit het restaurant van de Euromast in Rotterdam langs het aardoppervlak (zeeniveau) uit kan kijken.

Gebruik de volgende aannames: de aarde is een volmaakte bol met omtrek 40000 km. De hoogte van het restaurant van de Euromast boven zeeniveau is ca. 80m, dit is ongeveer $\frac{1}{80000}$ maal de aardstraal. Het is extreem helder weer. Hints: bepaal eventueel eerst de afstand langs het aardoppervlak in radialen; gebruik een Taylorveelterm.