Tentamen Infinitesimaalrekening A

3 januari 2013, 13.30 – 16.30 uur

- Maak de opgaven op het uitgereikte papier en vul op elk blad dat je inlevert je naam en studentnummer in. Je mag de opgaven in willekeurige volgorde maken.
- Geef niet alleen het antwoord, maar laat ook zien hoe je aan dat antwoord komt.
- Je hoeft alleen de eerste zeven opgaven te maken, deze tellen elk voor tien punten, behalve opgave 5, die voor 15 punten telt. Het tentamencijfer is het totaal aantal punten gedeeld door 7,5. Met de achtste opgave (bonusopgave) kun je maximaal tien punten extra verdienen, met dien verstande dat het totaalcijfer voor het tentamen nooit hoger dan 10 kan zijn.
- Op dit tentamen mogen geen rekenapparaten of andere electronica gebruikt worden, en ook geen boeken, dictaten of eigen aantekeningen.
- Veel succes!

Opgave 1. Bepaal alle tweemaal differentieerbare functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zodat voor alle x geldt
$f''(x) + f'(x) + f(x) = x^2 + x + 1$.

Opgave 2. We bekijken de limieten
a. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x - \cos x}{\sqrt{1+x^2}-1}$, en b. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{\cos 2x - \cos x}{\sqrt{1+x^2}-1}$.
Ga na of elk van deze limieten bestaat. Zo ja, bepaal de waarde, en zo nee, leg uit waarom de limiet niet bestaat.

Opgave 3. Bepaal alle complexe getallen z die voldoen aan
$\dfrac{z\,(z+1)}{(z+2i)(z+3i)} = -1$.
Schrijf de getallen in de vorm $a + bi$ waarbij a en b rationale getallen zijn.

Z.O.Z.!!!!!!!!

Opgave 4. Bepaal de tweede-orde Taylorveelterm van $f(x) = \sqrt[5]{x}$ in het steunpunt 32. (Let op: vijfdemachts wortel).
Bepaal hiermee een benadering van $\sqrt[5]{33}$. Geef een formule voor de fout in deze benadering, en toon aan dat de fout (in absolute waarde) kleiner is dan $\frac{1}{100.000}$.

Opgave 5 (15 punten)
(a) Primitiveer de functies $f(x) = \dfrac{1}{2+4x^2}$ en $g(x) = \dfrac{x}{2+4x^2}$.
(b) Primitiveer $h(x) = x^2 \cos(2x-1)$.

Opgave 6.
(a) Bepaal alle differentieerbare functies $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ waarvoor geldt
$f'(x) + \dfrac{f(x)}{x(x+1)} = 0$. Schrijf je antwoord zo eenvoudig mogelijk.
(b) Bepaal nu een differentieerbare functie $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ waarvoor geldt
$g'(x) + \dfrac{g(x)}{x(x+1)} = x + 1$ en $g(1) = 0$.

Opgave 7. Schrijf $\dfrac{1}{n\sqrt[3]{n}}\Sigma_{i=1}^{n}\sqrt[3]{i}$ als Riemannsom
en bepaal daarmee $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n\sqrt[3]{n}}\Sigma_{i=1}^{n}\sqrt[3]{i}$.

Bonusopgave: Opgave 8. Vaak wordt π met de breuk $\frac{22}{7}$ benaderd. In deze som gaan we afleiden dat de benadering niet exact is.
a. Laat zien dat er een veelterm $P(x)$ en een getal c bestaan zodat voor alle reële getallen x geldt
$x^4(1-x)^4 = P(x) \cdot (1+x^2) + c$.
b. Bereken nu $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,dx$.
c. Toon met behulp van b. aan: $\frac{22}{7} > \pi$.