Tentamen Infinitesimaalrekening A

3 januari 2017, 9.00 – 12.00 uur

- Maak de opgaven op het uitgereikte papier en vul op elk blad dat je inlevert je naam en studentnummer in.
- Geef niet alleen het antwoord, maar laat ook zien hoe je aan dat antwoord komt.
- Je mag de opgaven in willekeurige volgorde maken. Je hoeft alleen de eerste zeven opgaven te maken, deze tellen elk voor tien punten, behalve opgave 4, die voor 15 punten telt. Het tentamencijfer is het totaal aantal punten gedeeld door 7,5. Met de achtste opgave (bonusopgave) kun je maximaal tien punten extra verdienen, met dien verstande dat het tentamencijfer nooit hoger dan 10 kan zijn.
- Voor uitwerkingen van een opgave die gedeeltelijk goed zijn krijg je een deel van het totaal aantal punten voor die opgave.
- Op dit tentamen mogen geen rekenapparaten of andere electronica gebruikt worden, en ook geen boeken, dictaten of eigen aantekeningen. Smartphones moeten aan het begin van het tentamen uitgezet worden en mogen pas na afloop van het tentamen weer worden aangezet.
- *Veel succes!*

Opgave 1. Bepaal alle tweemaal differentieerbare reële functies $y(x)$ zodat
$y'' + 4y' + 4y = 1$ voor alle x.

Voor welke van deze functies bestaat $\lim_{x\to\infty} y(x)$? Bereken de limiet als hij bestaat.

Opgave 2. (a) Bereken $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+2x^2)}{e^x - 1 - x}$.

(b) We bekijken de functie f met domein $(0,\infty)$ en $f(x) = x^3 + x^2$ voor alle $x > 0$.

Laat zien dat deze functie f een inverse functie heeft.
We noemen deze inverse functie g. Bereken $g'(2)$.

Opgave 3. Bepaal alle complexe getallen z die voldoen aan
$(z-2)(z-3) = z(1+4i) + 1 - 14i$.
Geef de getallen in de vorm $a + bi$ waarbij a en b rationale getallen zijn.

Z.O.Z!!!!!

Opgave 4 (a) (7 punten)

Primitiveer voor $x > 0$ de functie $f(x) = x\sqrt{2x+1}$. Controleer je antwoord door differentiëren.

(b) 8 punten) Bereken $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2 - 2x + 2}\,dx$.

Opgave 5. (a) Bepaal alle differentieerbare functies $y(x)$ die gedefinieerd zijn op het hele domein $(0, \infty)$ en waarvoor geldt $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{3y}{x} = 0$.

(b) Bepaal nu een functie $y(x)$ die gedefinieerd is op het hele domein $(0, \infty)$, zodat geldt $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{3y}{x} = x^3$ en $y(1) = 0$.

Opgave 6. (a) Bepaal de tweede-orde Taylorveelterm van
$f(x) = \sqrt[3]{x}$ in het steunpunt 27 en bepaal hiermee een benadering van $\sqrt[3]{28}$. [let op: derdemachts wortel. Je hoeft de breuken in de benadering niet uit te werken.]

(b) Toon aan dat de fout in je benadering van $\sqrt[3]{28}$ in absolute waarde kleiner is dan $\dfrac{1}{100000}$.

Opmerking: $3^{10} = 59049$.

Opgave 7. Bereken $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \cos^2\left(\frac{j\pi}{n}\right)$.

Bonusopgave. Opgave 8.

Bereken $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{1}{x^4 - 1}\,dx$.