Uitwerking tentamen "Infinitesimaalrekening A"

Bart Keller

3 januari 2017

(1) We lossen eerst de homogene vergelijking op. Dat wil zeggen, we zoeken eerst functies $y(x)$ die voldoen aan de vergelijking $y'' + 4y' + 4y = 0$. Hiervoor vervangen we y'' door λ^2, y' door λ en laten we de y weg. Dit geeft de vergelijking $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ en deze vergelijking lossen we op voor λ. We hebben dat:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 4}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Dus we hebben maar een enkele eigenwaarde. Dit betekent dat de oplossingen van de homogene vergelijking van de vorm $(C_1 + C_2 x)e^{-2x}$ zijn, met C_1 en C_2 reële constantes.

Dan moeten we nu nog een oplossing vinden van de inhomogene vergelijking. Deze is echter makkelijk gevonden. We kunnen bijvoorbeeld $y(x) = \frac{1}{4}$ nemen. Dit geeft dus dat de oplossingen van de vergelijking gelijk zijn aan:

$$\frac{C_1 + C_2 x}{e^{2x}} + \frac{1}{4}$$

Voor ieder van deze functies bestaat de limiet van x naar oneindig. We zien namelijk dat:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{C_1 + C_2 x}{e^{2x}} = C_1 \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{2x}} + C_2 \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{2x}} = 0 + 0 = 0$$

Dus we mogen nu concluderen dat $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{C_1+C_2 x}{e^{2x}} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

(2a) We kunnen de Taylorrreeksen van alle termen uitschrijven en kijken wat er overblijft na wegdelen. Ikzelf ben echter meer fan van de regel van l'Hôpital. Dus dit gebruik ik in deze uitwerking.

We kunnen de regel van l'Hôpital gebruiken, aangezien $\log(1+20^2) = \log(1) = 0$ en $e^0 - 1 + 0 = 1 - 1 = 0$. Dit geeft dus dat:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+2x^2)}{e^x - 1 - x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{4x}{1+2x^2}}{e^x - 1}$$

Dit is duidelijk nog niet voldoende, dus we passen de regel nogmaals toe. Dit geeft:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+2x^2)}{e^x - 1 - x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{4x}{1+2x^2}}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{4-8x^2}{(1+2x^2)^2}}{e^x} = \frac{\frac{4-8\cdot 0^2}{(1+2\cdot 0^2)^2}}{e^0} = \frac{\frac{4}{1^2}}{1} = 4$$

Dus we mogen concluderen dat $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log(1+2x^2)}{e^x-1-x} = 4$.

(2b) We laten zien dat de afgeleide van $f(x)$ strikt positief is op het interval $(0, \infty)$, waaruit we direct kunnen afleiden dat de functie injectief op dat interval.

We zien dat $f'(x) = 3x^2 + 2x$, en deze functie is inderdaad positief op het interval $(0, \infty)$. Dus we zien dat f een inverse heeft op dit interval. Deze noemen we nu $g(x)$.

We willen nu de waarde $g'(2)$ berekenen. We hebben de volgende formule voor de afgeleide van g:

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

We zien dat $f(1) = 1^3 + 1^2 = 2$, dus $g(2) = 1$. Verder hebben we dat $f'(1) = 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = 5$, dus we zien nu dat:

$$g'(2) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{5}$$

(3) We werken eerst alle haakjes weg om een kwadratische vergelijking te krijgen. We hebben dat:

$$(z-2)(z-3) = z^2 - 3z - 2z + 6 = z^2 - 5z + 6$$

Dus we kunnen de gegeven vergelijking omschrijven naar $z^2 - (6+4i)z + 5 + 14i = 0$. Dan gebruiken we nu de complexe ABC-formule om te concluderen dat:

$$z_{1,2} = \frac{6 + 4i \pm \sqrt{(6+4i)^2 - 4(5+14i)}}{2}$$

de complexe nulpunten zijn. Dit moeten we natuurlijk wel even gaan uitwerken.

We beginnen met de term onder de wortel. We zien het volgende:

$$(6+4i)^2 - 4(5+14i) = 36 + 48i - 16 - 20 - 56i = 0 - 8i = -8i$$

Nu moeten we de wortel van $-8i$ berekenen. Stel dat $\sqrt{-8i} = c + di$, dan hebben we dat $-8i = (c+di)^2 = c^2 - d^2 + 2cdi$. Dus daaruit volgt dan dat $0 = c^2 - d^2$ en $-8 = 2cd$. Dit geeft dat $c = \pm 2$ en $d = \mp 2$. Dus de twee complexe wortels van $-8i$ zijn $2 - 2i$ en $-2 + 2i$.

Dit geeft ons dus dat de oplossingen van onze originele vergelijking gelijk zijn aan:

$$z_{1,2} = \frac{6 + 4i \pm \sqrt{(6+4i)^2 - 4(5+14i)}}{2} = \frac{6 + 4i \pm (2-2i)}{2} = 3 + 2i \pm (1-i)$$

Dus we mogen concluderen dat de oplossingen van de vergelijking gelijk zijn aan $z_1 = 4 + i$ en $z_2 = 2 + 3i$.

(4a) We willen $\int x\sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x$ berekenen. Eerst integreren we partitieel. We kiezen $u(x) = x$ en $v'(x) = \sqrt{2x+1}$. Dit geeft dat $u'(x) = 1$ en $v(x) = \frac{1}{3}(2x+1)^{3/2}$. Dus hieruit volgt dat:

$$\int x\sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x(2x+1)^{3/2} - \frac{1}{3}\int (2x+1)^{3/2}\,\mathrm{d}x$$

De term die nu in de integraal staat is in een keer uit te rekenen, maar voor de duidelijkheid passen we eerst een substitutie toe. We zeggen dat $v = 2x + 1$. Dit geeft dat $\mathrm{d}v = 2\mathrm{d}x$. Dus:

$$\int (2x+1)^{3/2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int v^{3/2}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}v^{5/2} = \frac{1}{5}(2x+1)^{5/2}$$

Dus hieruit kunnen we concluderen dat:

$$\int x\sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x(2x+1)^{3/2} - \frac{1}{15}(2x+1)^{5/2}$$

Dit kunnen we controleren door te differentiëren. We hebben dat:

$$[\frac{1}{3}x(2x+1)^{3/2}]' = [\frac{1}{3}x]'(2x+1)^{3/2} + \frac{1}{3}x[(2x+1)^{3/2}]' = \frac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + \frac{2}{3}x\cdot\frac{3}{2}\sqrt{x} = \frac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + x\sqrt{2x+1}$$

We hebben ook dat:

$$[\frac{1}{15}(2x+1)^{5/2}]' = 2\cdot\frac{1}{15}\cdot\frac{5}{2}(2x+1)^{3/2} = \frac{1}{3}(2x+1)^{3/2}$$

Dus in het bijzonder hebben we dat:

$$[\frac{1}{3}x(2x+1)^{3/2} - \frac{1}{15}(2x+1)^{5/2}]' = \frac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + x\sqrt{2x+1} - \frac{1}{3}(2x+1)^{3/2} = x\sqrt{2x+1}$$

(4b) Om deze breuk eenvoudiger te maken, kunnen we deze keer geen gebruik maken van breuksplitsen. Dit komt doordat de term $x^2 - 2x + 2$ geen reële nulpunten heeft. In de plaats daarvan gaan we eerst kwadraatafsplitsen en daarna substitueren. Kwadraatafsplitsen geeft dat:

$$\frac{x}{x^2-2x+2} = \frac{x}{(x-1)^2+1+2} = \frac{x}{(x-1)^2+3}$$

We kunnen nu substitueren. We kiezen $u = x - 1$, dus $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$. Dus we hebben dat:

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 \frac{u+1}{u^2+3}\,\mathrm{d}u = \int_{-1}^0 \frac{u}{u^2+3}\,\mathrm{d}u + \int_{-1}^0 \frac{1}{u^2+3}\,\mathrm{d}u$$

Deze twee integralen kunnen we apart evalueren. We doen eerst de linkerintegraal. Hier moeten we nog een substitutie doen. We kiezen $v = u^2$, dan hebben we dat $\mathrm{d}v = 2u\mathrm{d}u$. Dit geeft dat:

$$\int_{-1}^0 \frac{u}{u^2+3}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_1^0 \frac{1}{v+3}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}[\log(v+3)]_{v=1}^{v=0} = \frac{1}{2}[\log(u^2+3)]_{u=-1}^{u=0} =$$

$$\frac{1}{2}[\log((x-1)^2+3)]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}(\log(3)-\log(4)) = \frac{1}{2}\log(\frac{3}{4})$$

Dan nu de andere integraal. Die kunnen we een keer opschrijven, want het is een van de standaardintegralen. We weten namelijk dat:

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{u^2+3}\,\mathrm{d}u = [\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{u}{\sqrt{3}})]_{u=-1}^{u=0} = [\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{x-1}{\sqrt{3}})]_{x=0}^{x=1} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(0)-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(-\frac{1}{\sqrt{3}})=0-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

Dus we mogen uiteindelijk concluderen dat:

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\log(\frac{3}{4})+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

(5a) We zoeken naar alle functies $y(x)$ waarvoor geldt dat $\frac{dy}{dx}=\frac{3y}{x}$. Dit omschrijven geeft:

$$\frac{1}{3y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}$$

Nu kunnen we aan beide kanten integreren over x, en een klein beetje omschrijven geeft dan:

$$\frac{1}{3}\int\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y=\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

Dus we hebben dat:

$$\frac{1}{3}\log(y)=\log(x)+C_1$$

Aan beide kanten de e-macht nemen geeft nu dat:

$$y^{\frac{1}{3}}=x\cdot e^{C_1}$$

Aan beide kanten de derde macht nemen geeft nu:

$$y=x^3\cdot(e^{C_1})^3=x^3\cdot C_2$$

Dus de oplossingen van de homogene vergelijking zijn alle functies van de vorm $y=Cx^3$, met $C\in\mathbb{R}_{>0}$.

(5b) We zoeken dus naar een functie waarvan de afgeleide en drie maal de functie gedeeld door x niet zo ver van elkaar afliggen. Dit klinkt alsof y een polynoom moet zijn; de afgeleide nemen is daar immers bijna gelijk aan delen door x.

Dus we stellen $y=ax^4$ en kijken voor welke waarde van de a y een oplossing is van de inhomogene vergelijking. We hebben nu dat:

$$y'-\frac{3y}{x}=4ax^3-\frac{3ax^4}{x}=4ax^3-3ax^3=ax^3=x^3$$

Dus we zien dat $a=1$ voldoet. Dus het polynoom $y=x^4$ is een oplossing van de inhomogene vergelijking.

Dus de oplossingen van de gehele vergelijking zijn functies van de vorm $y(x)=Cx^3+x^4$. Als we vervolgens ook nog willen dat $y(1)=0$, moeten we hebben dat $0=C\cdot 1^3+1^4$. Dus we hebben dan dat $C=-1$.

Dus $y(x)=x^4-x^3$ is een differentieerbare functie gedefinieerd op $(0,\infty)$ waarvoor geldt dat $y(1)=0$ en $y'-\frac{3y}{x}=x^3$ voor alle $x>0$.

(6a) De tweede-orde Taylorveelterm van een functie $f(x)$ in het steunpunt a ziet er in het algemeen als volgt uit:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

Nu vullen we in dat $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en $a = 27$. Dit geeft dat $f(a) = f(27) = \sqrt[3]{27} = 3$. Verder hebben we dat $f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}$, dus $f'(a) = f'(27) = \frac{1}{3 \cdot 9} = \frac{1}{27}$. Verder hebben we dat $f''(a) = f''(27) = \frac{-2}{9 \cdot 27^{(5/3)}} = \frac{-2}{9 \cdot 243}$. Dit alles geeft dus dat de tweede-orde Taylor-polynoom van de functie $f(x) = \sqrt[3]{x}$ in het steunpunt $a = 27$ gelijk is aan:

$$f(x) = 3 + \frac{1}{27}(x-27) - \frac{1}{9 \cdot 243}(x-27)^2$$

De benadering in het punt $x = 28$ is hiermee dus gelijk aan: $f(\frac{1}{2}) = 3 + \frac{1}{27} - \frac{1}{9 \cdot 243}$

(6b) De foutterm van deze Taylorexpansie is $\frac{f'''(s)}{6}(28-s)^3$, waarbij we hebben dat $s \in [27, 28]$. De derde afgeleide van de functie f in het punt s is gelijk aan $f'''(s) = \frac{10}{27 \cdot s^{8/3}}$. Deze afgeleide is een dalende functie op het interval $[27, 28]$, omdat de functie $\frac{1}{x^{8/3}}$ dat ook is op dat interval. Dit geeft dat

$$f'''(s) \leq f'''(27) = \frac{10}{27 \cdot 27^{8/3}} = \frac{10}{3^3 \cdot (3^3)^{8/3}} = \frac{10}{3^3 \cdot 3^8} = \frac{10}{3^{11}} = \frac{10}{3^{11}} = \frac{10}{3 \cdot 3^{10}} =$$

$$\frac{10}{3 \cdot 59049} < \frac{10}{3 \cdot 59000} = \frac{1}{17700}$$

Verder hebben we dat $(28-s)^3 \leq (1)^3 = 1$. Dit combineren geeft dat:

$$\frac{f'''(s)}{6}(28-s)^3 \leq \frac{1}{17700 \cdot 6} \cdot 1 = \frac{1}{106200} < \frac{1}{100000}$$

Dus we zien dat de foutmarge inderdaad kleiner is dan $\frac{1}{100000}$.

(7) We kunnen deze som als een Riemann-som beschouwen van de functie $f(x) = \cos^2(\pi x)$, want dan hebben we dat $f(\frac{j}{n}) = \cos^2(\frac{j\pi}{n})$. Dit geeft ons dat:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \cos^2(\frac{j\pi}{n}) = \int_0^1 \cos^2(\pi x) \, \mathrm{d}x$$

Nu moeten we dus nog deze integraal zien uit te rekenen. Dit doen we door de term $\cos^2(\pi x)$ om te schrijven naar een makkelijkere term. We weten dat $\cos(2\pi x) = \cos^2(\pi x) - \sin^2(\pi x) = 2\cos^2(\pi x) - 1$. Dus we hebben dat $\cos^2(\pi x) = \frac{1}{2}\cos(2\pi x) + \frac{1}{2}$. Gebruiken we dit, dan hebben we dat:

$$\int_0^1 \cos^2(\pi x) \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2}\cos(2\pi x) + \frac{1}{2} \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2}\cos(2\pi x) \, \mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{2} \, \mathrm{d}x =$$

$$[\frac{1}{4\pi}\sin(2\pi x)]_{x=0}^{x=1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4\pi}(\sin(2\pi) - \sin(0)) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Dus we concluderen dat $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\cos^2(\frac{j\pi}{n}) = \frac{1}{2}$.

(8) Hiervan geven we uiteraard geen oplossing. Er moet iets overblijven om zelf over na te denken.