# Uitwerking tentamen "Infinitesimaalrekening A"

Bart Keller

7 november 2017

**(1a)** De tweede-orde Taylorveelterm van een functie $f(x)$ in het steunpunt $a$ ziet er in het algemeen als volgt uit:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

Nu vullen we in dat $f(x) = \log(\cos(x))$ en $a = 0$. Dit geeft dat $f(a) = f(0) = \log(\cos(0)) = \log(1) = 0$. Verder hebben we dat $f'(x) = -\sin(x) \cdot \frac{1}{\cos(x)} = -\tan(x)$, dus $f'(a) = f'(0) = -\tan(0) = 0$. Verder hebben we dat $f''(a) = f''(0) = \frac{-1}{\cos(0)^2} = -1$. Dit alles geeft dus dat de tweede-orde Taylor-polynoom van de functie $f(x) = \log(\cos(x))$ in het steunpunt $a = 0$ gelijk is aan:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2$$

De benadering in het punt $x = \frac{1}{2}$ is hiermee dus gelijk aan: $f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^2 = -\frac{1}{8}$

**(1b)** De foutterm van deze Taylorexpansie is $\frac{f'''(s)}{6}(\frac{1}{2} - s)^3$, waarbij we hebben dat $s \in [0, \frac{1}{2}]$. De derde afgeleide van de functie $f$ in het punt $s$ is gelijk aan $f'''(s) = \frac{2\sin(s)\cos(s)}{\cos(s)^4} = \frac{2\sin(s)}{\cos(s)^3}$. Deze afgeleide is een stijgende functie op het interval $[0, \frac{1}{2}\pi]$, omdat de functies $2\sin(x)$ en $\frac{1}{\cos(x)^3}$ dat ook zijn op dat interval. Dit geeft dat

$$f'''(s) \leq f'''(\frac{1}{2}) < f'''(\frac{\pi}{6}) = \frac{2\sin(\frac{\pi}{6})}{\cos(\frac{\pi}{6})^3} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{(\frac{1}{2}\sqrt{3})^3} = \frac{8}{\sqrt{3}^3} < \frac{8}{\sqrt{3}^2} = \frac{8}{9}$$

Verder hebben we dat $(\frac{1}{2} - s)^3 \leq (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$. Dit combineren geeft dat:

$$\left| f(\frac{1}{2}) + \frac{1}{8} \right| = \frac{f'''(s)}{6}(\frac{1}{2} - s)^3 \leq \frac{8}{9 \cdot 6} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{9 \cdot 6} = \frac{1}{42} < \frac{1}{25}$$

Dus we zien dat de foutmarge in absolute waarde inderdaad kleiner is dan $\frac{1}{25}$.

**(2)** We schrijven de gelijkheid eerst een beetje om. Dan staat er dat $-(1-i)z^2 + 4z - (19+9i) = 0$. Dan gebruiken we nu de complexe ABC-formule om te concluderen dat:

$$z_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(1-i)(19+9i)}}{-2(1-i)}$$

de complexe nulpunten zijn. Dit moeten we natuurlijk wel even gaan uitwerken.

We beginnen met de term onder de wortel. We zien het volgende:

$$16-4(1-i)(19+9i) = 16-4(19+9i-19i+9) = 16-4(28-10i) = 16-112+40i = -96+40i$$

Van deze term moeten we nu dus de wortel uitschrijven. Stel dat $\sqrt{-96+40i} = c+di$, dan hebben we dat $-96+40i = (c+di)^2 = c^2-d^2+2cdi$. Dus daaruit volgt dan dat $-96 = c^2-d^2$ en $40 = 2cd$. Dit geeft dat $c = \pm 2$ en $d = \pm 10$. Dus de twee complexe wortels van $-96+40i$ zijn $2+10i$ en $-2-10i$.

Dit geeft ons dus dat de oplossingen van onze originele vergelijking gelijk zijn aan:

$$z_{1,2} = \frac{-4 \pm (2+10i)}{-2(1-i)} = \frac{-4 \pm (2+10i)}{-2(1-i)} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{-4(i+i) \pm (2+10i)(1+i)}{-2(1^2-i^2)} =$$

$$\frac{-4-4i \pm (2+10i+2i-10)}{-2(1+1)} = \frac{-4-4i \pm (-8+12i)}{-4} = 1+i \pm (2-3i)$$

Dus we mogen concluderen dat de oplossingen van de vergelijking gelijk zijn aan $z_1 = 3-2i$ en $z_2 = -1+4i$.

**(3)** We lossen eerst de homogene vergelijking op; dat is $y'' + 4y' + 13y = 0$. Hiervoor vervangen we $y''$ door $\lambda^2$, $y'$ door $\lambda$ en laten we de $y$ weg. Dit geeft de vergelijking $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$ en deze vergelijking lossen we op voor $\lambda$. We hebben dat:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4\cdot 13}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-4 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i$$

Dit betekent dus dat de homogene oplossing van $y'' + 4y' + 13y = 0$ in de vorm is van $e^{-2x}(C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x))$.

Dan zoeken we nu een oplossing van de inhomogene vergelijking. Aangezien we uiteindelijk iets met een cosinus eruit moeten krijgen, proberen we een oplossing van de vorm $y = a\sin(x) + b\cos(x)$. Dit geeft dat:

$$y''+4y'+13y = -a\sin(x) - b\cos(x) + 4a\cos(x) - 4b\sin(x) + 13a\sin(x) + 13b\cos(x) = 40\cos(x)$$

Dus we moeten hebben dat $-a - 4b + 13a = 0$ en $-b + 4a + 12b = 40$. Dit geeft dus respectivelijk dat $12a = 4b$ en $4a + 12b = 40$. Dus we hebben dat $3a = b$, dus $4a + 36a = 40$. Dus $a = 1$ en $b = 3$. Dit geeft dat een oplossing van de inhomogene vergelijking gelijk is aan $\sin(x) + 3\cos(x)$.

Dus we mogen concluderen dat de functies die voldoen aan de vergelijking van de vorm zijn van $y(x) = e^{-2x}(C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x)) + \sin(x) + 3\cos(x)$.

**(4a)** Eerst passen we een substitutie toe. We kiezen $z = \sqrt{x}$. Dan hebben we dat $\mathrm{d}z = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2z}\,\mathrm{d}x$. Dit geeft ons dat:

$$\int_0^1 \sin(\pi\sqrt{x})\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 z\sin(\pi z)\,\mathrm{d}z$$

Nu kunnen we partitieel integreren. We kiezen hierbij dat $u(z) = z$ en $v'(z) = \sin(\pi z)$. Dit geeft dus dat $u'(z) = 1$ en $v(z) = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi z)$. We mogen nu zeggen dat:

$$2\int_0^1 z\sin(\pi z)\ \mathrm{d}z = 2\cdot[-\frac{1}{\pi}z\cos(\pi z)]_{z=0}^{z=1} + \frac{2}{\pi}\int_0^1 \cos(\pi z)\ \mathrm{d}z = \frac{2}{\pi} + 0 + \frac{2}{\pi}\int_0^1 \cos(\pi z)\ \mathrm{d}z$$

De integraal die er nu staat kunnen we direct uitrekenen. We hebben namelijk dat:

$$\int_0^1 \cos(\pi z)\ \mathrm{d}z = [\frac{1}{\pi}\sin(\pi z)]_{z=0}^{z=1} = [\frac{1}{\pi}\sin(\pi\sqrt{x})]_{x=0}^{x=1} = 0 - 0 = 0$$

Dus we mogen concluderen dat $\int_0^1 \sin(\pi\sqrt{x})\ \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}$.

**(4b)** We gebruiken de methode van breuksplitsen. We zoeken nu dus termen $A$, $B$ en $C$ zodat $\frac{1}{x^3-x^2} = \frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{(x-1)}$. Deze termen moeten zo gekozen worden dat geldt dat:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{(x-1)} = \frac{Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2}{x^2(x-1)} = \frac{1}{x^2(x-1)}$$

Werken we de term uit de middelste breuk verder uit, dan krijgen we dat we moeten hebben dat:

$$Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2 = Ax^2 - Ax + Bx - B + Cx^2 = (A+C)x^2 + (B-A)x - B = 1$$

Dit geeft ons de volgende vergelijkingen: $A + C = 0$, $B - A = 0$ en $-B = 1$. Dit stelsel heeft de volgende oplossing: $B = -1$, $A = -1$ en $C = 1$. Dus we hebben dat:

$$\frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$$

Deze term kan eenvoudig worden geprimitiveerd. We weten namelijk dat $\int \frac{1}{x-1}\ \mathrm{d}x = \log(x-1)$, dat $\int -\frac{1}{x}\ \mathrm{d}x = -\log(x)$ en dat $\int -\frac{1}{x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{x}$. Dus we hebben dan dat

$$\int \frac{1}{(x^3-x^2)}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\ \mathrm{d}x = \log(x-1) + \log(x) + \frac{1}{x}$$

Dit kunnen we eenvoudig controleren door te differentiëren.

**(5a)** We kunnen de Taylorrreeksen van alle termen uitschrijven en kijken wat er overblijft na wegdelen. Ikzelf ben echter meer fan van de regel van l'Hôpital. Dus dit gebruik ik in deze uitwerking.

Eerst spiltsen we de limiet op in twee eenvoudigere limieten. We mogen dat doen mits die beide bestaan, maar dat laten we dan ook zien. Dit zal het rekenwerk aanzienlijk vereenvoudigen. We doen dit als volgt:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos(x))\sin(x)}{x^2\log(x+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{\log(x+1)}$$

We kijken nu eerst naar de linkerlimiet. We kunnen de regel van l'Hôpital gebruiken, aangezien we hebben dat $(1 - \cos(0)) = 0$ en $0^2 = 0$. Dit geeft dat:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{2x}$$

Dit is duidelijk nog niet voldoende, dus we passen de regel nogmaals toe. Dit geeft:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

Dan nu de andere limiet. Ook daar kunnen we de regel van l'Hôpital gebruiken, aangezien $\sin(0) = 0$ en $\log(1) = 0$. Dit geeft dat:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{\log(x+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{\frac{1}{x+1}} = \frac{1}{\frac{1}{1}} = 1$$

Dus we mogen concluderen dat:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos(x))\sin(x)}{x^2 \log(x+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{\log(x+1)} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

**(5b)** Deze limiet bestaat. We kunnen dit laten zien met behulp van de knijpstelling.

We hebben dat $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ voor iedere $x \in \mathbb{R}$. Daaruit kunnen we concluderen dat $\frac{\lfloor x \rfloor}{x} \leq \frac{x}{x} = 1$ en dat $\frac{\lfloor x \rfloor}{x} > \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$ voor iedere $x > 0$. Dus we mogen zeggen dat:

$$1 = \lim_{x \to \infty} 1 - \frac{1}{x} \leq \lim_{x \to \infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \leq \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x} = 1$$

Dus met de knijpstelling mogen we concluderen dat $\lim_{x \to \infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x} = 1$.

**(6a)** We laten zien dat de afgeleide van $f(x)$ strikt positief is op het interval $[\frac{1}{2}, \infty)$, waaruit we direct kunnen afleiden dat de functie injectief op dat interval.

Om de afgeleide van $f(x)$ te kunnen berekenen, is het belangrijk om te zien dat $x^x = e^{x \log(x)}$. We zien het volgende:

$$f'(x) = [e^{x \log(x)}]' = [x \log(x)]' \cdot e^{x \log(x)} = (\log(x) + 1) \cdot e^{x \log(x)} = x^x(\log(x) + 1)$$

Aangezien $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{e}$, en $\log(e^{-1}) = -1$, hebben we dat $\log(x) + 1 > 0$ voor alle $x \in [\frac{1}{2}, \infty)$. Dit volgt mede doordat $\log(x)$ een strikt stijgende functie is. Verder hebben we duidelijk dat $x^x > 0$ voor iedere $x > 0$. Dus we mogen concluderen dat $x^x(\log(x) + 1) > 0$ voor alle $x \in [\frac{1}{2}, \infty)$. Dus de functie $f(x)$ is strikt stijgend op het interval $x \in [\frac{1}{2}, \infty)$. Dus op dit interval heeft $f(x)$ een inverse: $g(x)$.

We weten dat $\text{dom}(g) = \text{ran}(f)$. Omdat $f(x)$ strikt stijgend is, zal gelden dat $\text{ran}(f) = [f(\frac{1}{2}), \infty)$, omdat $f(x)$ zijn minimum aanneemt in het punt $x = \frac{1}{2}$ en verder willekeurig groot wordt. We weten dat $f(\frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Dus we zien dat $\text{dom}(g) = [\frac{1}{2}\sqrt{2}, \infty)$.

**(6b)** Voor een lineaire benadering van $g(x)$ hebben we de afgeleide van $g(x)$ nodig. Gelukkig is daar een formule voor. We hebben namelijk dat:

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

We werken met het steunpunt 4. We weten dat $2^2 = 4$, dus $f(2) = 4$. Dit geeft dat $g(4) = 2$. Verder weten we dat $f'(2) = 2^2(\log(2) + 1) = 4(\log(2) + 1)$. Dus we mogen concluderen dat:

$$g'(4) = \frac{1}{f'(g(4))} = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{4(\log(2) + 1)}$$

Verder weten we dat de algmene formule van een lineaire benadering in het steunpunt $a$ gelijk is aan $g(x) \approx g(a) + g'(a)(x - a)$. Dit geeft dus dat:

$$g(x) \approx g(4) + g'(4)(x - 4) = 2 + \frac{x - 4}{4(\log(2) + 1)}$$

Dit is dus de lineaire benadering van $g(x)$ in het steunpunt 4.

**(7)** We lossen eerst de homogene vergelijking op. Dat is, we zoeken de oplossingen van de vergelijking:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{2x}$$

Dit omschrijven geeft:

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2x}$$

Nu kunnen we aan beide kanten integreren over $x$, en een klein beetje omschrijven geeft dan:

$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

Dus we hebben dat:

$$\log(y) = \frac{1}{2}\log(x) + C_1$$

Aan beide kanten de $e$-macht nemen geeft nu dat:

$$y = x^{\frac{1}{2}} \cdot e^{C_1} = \sqrt{x} \cdot C_2$$

Dus de oplossingen van de homogene vergelijking zijn alle functies van de vorm $y = C\sqrt{x}$, met $C \in \mathbb{R}$.

Dan zoeken we nu een oplossing van de inhomogene vergelijking. We zoeken dus naar een functie waarvan de afgeleide en de functie gedeeld door $2x$ niet zo ver van elkaar afliggen. Dit klinkt alsof $y$ een polynoom moet zijn; de afgeleide nemen is daar immers bijna gelijk aan delen door $x$.

Dus we stellen $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ en kijken voor welke waarde van de constanten $y$ een oplossing is van de inhomogene vergelijking. We hebben nu dat:

$$y' - \frac{y}{2x} = 3ax^2 + 2bx + c - \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{2x} = 3ax^2 + 2bx + c - \frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{2}bx - \frac{1}{2}c - \frac{d}{2x} = x$$

Dit geeft ons dan de volgende vergelijkingen voor de constantes: $3a - \frac{1}{2}a = 0$, $2b - \frac{1}{2}b = 1$, $c - \frac{1}{2}c = 0$ en $d = 0$. Dus we krijgen dat $a = 0$, $b = \frac{2}{3}$, $c = 0$ en $d = 0$. Dus het polynoom $y = \frac{2}{3}x^2$ is een oplossing van de inhomogene vergelijking.

Dus de oplossingen van de gehele vergelijking zijn dus functies van de vorm $y(x) = C\sqrt{x} + \frac{2}{3}x^2$. Als we vervolgens ook nog willen dat $y(1) = 1$, moeten we hebben dat $1 = C\sqrt{1} + \frac{2}{3}1^2 = C + \frac{2}{3}$. Dus we hebben dan dat $C = \frac{1}{3}$.

Dus $y(x) = \frac{1}{3}\sqrt{x} + \frac{2}{3}x^2$ is een differentieerbare functie gedefinieerd op $(0, \infty)$ waarvoor geldt dat $y(1) = 1$ en $y' - \frac{y}{2x} = x$ voor alle $x > 0$.

**(8)** Hiervan geven we uiteraard geen oplossing. Er moet iets overblijven om zelf over na te denken.