Tentamen Infinitesimaalrekening A

2 januari 2018, antwoorden en enkele uitwerkingen.

Deze uitwerkingen zijn niet de enig mogelijke!

Opgave 1. (a) (5 punten) De tweede-orde Taylorveelterm van $f(x) = \sqrt[3]{x}$ in het steunpunt 1000 is $10 + \frac{1}{300}(x - 1000) - \frac{1}{900000}(x - 1000)^2$ en hiermee vinden we de benadering $10 - (1/300) + (1/900000) = (10,0033322222222\ldots)$

(b) (5 punten) De fout in de benadering van $\sqrt[3]{1001}$ is gelijk aan $\frac{1}{6} \cdot \frac{10}{27} \cdot s^{-\frac{8}{3}}$ voor een getal s tussen 1000 en 1001. Dit is in absolute waarde kleiner dan $\dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{10}{27} \cdot 10^{-8} = \dfrac{10}{162} \cdot 10^{-8} < \dfrac{1}{10} \cdot 10^{-8} = 10^{-9}$.

Merk op $\sqrt[3]{1001} = 10,0033322228\ldots$

Opgave 2.

De tweemaal differentieerbare reële functies $y(x)$ zodat
$y'' - 2y' + 3y = 3x$ voor alle x zijn $y(x) = Ae^x \cos(x\sqrt{2}) + Be^x \sin(x\sqrt{2}) + x + \frac{2}{3}$.

Opgave 3. (a) (5 punten) Er geldt $\log(1 - x)^{\frac{1}{2x}} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\log(1 - x)}{x}$. Stel $g(x) = \log(1 - x)$ dan is $\frac{\log(1-x)}{x} = \frac{g(x)-g(0)}{x}$ en zo zien we

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 - x)}{2x} = \frac{1}{2}g'(0) = \frac{-1}{2}$. Dus bestaat de gevraagde limiet met waarde $e^{\frac{-1}{2}}$.

(b) (5 punten) Een keer de regel van l'Hôpital toepassen geeft $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\log(x) + \sin \pi x} = (\frac{1}{2} - \frac{1}{3})/(1 - \pi) = \frac{1}{6 - 6\pi}$.

Opgave 4 (a) (7 punten) Door twee keer partieel integreren vinden we $\displaystyle\int f(x)\,dx = x^2 \sin(2x + 3)\,dx = 1/4((1 - 2x^2)\cos(3 + 2x) + 2x \sin(3 + 2x))$.

(b) (8 punten) Door kwadraatafsplitsen vinden we allereerst $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2 + 2x + 5}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{(x + 1)^2 + 4}\,dx = \int_{0}^{2} \frac{1}{u^2 + 4}\,du$. Nu substitueren we $u = 2v$ en we krijgen $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{1}{u^2 + 4}\,du = 2\int_{0}^{1} \frac{1}{4v^2 + 4}\,dv = \frac{1}{2}(\arctan 1 - \arctan 0) = \frac{1}{8}\pi$.

Opgave 5.

We stellen $z = w^2$ en lossen eerst op $w^2 + iw + 2 = 0$ met oplossingen $w = i$ en $w = -2i$. $z^2 = i$ geeft twee oplossingen $z = \pm(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i)$.

$z^2 = -2i$ geeft nog twee oplossingen $z = \pm(1 - i)$. Dit kun je ook gemakkelijk inzien door de getallen in het complexe vlak te tekenen.

Opgave 6. De vergelijking $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + 1$ heeft algemene oplossing $y(x) = x\log x + cx$ waarbij c een willekeurige constante is. Dit kunnen we vinden door eerst de homogene vergelijking $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0$ op te lossen (oplossing $y = kx$ voor k constant) en daarna variatie van constanten toe te passen. Invullen van $y(1) = 1$ geeft $c = 1$

Opgave 7. Stel $f(x) = xe^{-x}$ op het domein $(-\infty, 1)$.

(a) (3 punten) Er geldt $f'(x) = e^{-x}(1 - x) > 0$ op het domein en dus is f op het domein strikt monotoon stijgend en daardoor 1-1. f heeft dus een inverse g.

(b) (1 punt) Het domein van g is het bereik van f op zijn domein, dat wil zeggen $(-\infty, \frac{1}{e})$.

(c) (6 punten) De lineaire benadering in $a = \frac{1}{2}\log 2$ is $g(a) + g'(a)(x - a)$. Omdat $\log 2 < 1$ en $f(\log 2) = \log 2 \cdot e^{-\log 2} = \frac{1}{2}\log 2$ geldt $g(\frac{1}{2}\log 2) = \log 2$.

verder $f'(g(a)) \cdot g'(a) = 1$ en $f'(g(a)) = f'(\log 2) = \frac{1}{2}(1 - \log 2)$ dus $g'(a) = \frac{2}{1-\log 2}$.

Bonusopgave. Opgave 8.

De stelling van De Moivre zegt $\cos nx + i\sin nx = (\cos x + i\sin x)^n$

Hieruit krijgen we door het nemen van reële delen $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$. Als $\cos x$ rationaal is is daardoor $\cos 2x$ rationaal (1).

Voor n oneven geldt $\cos nx = \cos^n x + a_1 \cos^{(n-2)} x \sin^2 x + a_2 \cos^{(n-4)} x \sin^4 x \ldots$ voor natuurlijke getallen $a_1, a_2, \ldots$: nu kunnen we overal $\sin^{2k} x$ vervangen door $(1 - \cos^2)^k$. Als $\cos x$ rationaal is is daardoor ook $\cos nx$ rationaal (2). Door (1) en (2) eventueel herhaald toe te passen volgt dat $\cos kx$ rationaal is voor alle natuurlijke getallen k.

Als $x = \frac{\pi}{6}$ is $\sin x = \frac{1}{2}$ en $\sin 2x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ dus voor de sinus geldt de bewering niet.