Infi A hertentamen 3 jan 2019

Aanwijzingen

- Motiveer alle antwoorden.
- Werk rustig, netjes en duidelijk.
- Zorg dat je uitwerking maar één interpretatie toelaat.
- Alle informatie op dit opgavenblad mag bij alle (deel)opgaven gebruikt worden.
- Gebruik van elektronica of naslagwerken is niet toegestaan.
- Totaal 40 punten.

Normering voor 4 pt vragen (andere vragen naar rato):

4pt Goed begrepen en goed uitgevoerd met voldoende toelichting, eventueel enkele onbelangrijke rekenfoutjes.

3pt Grote lijn begrepen, maar technische vaardigheid schiet tekort;
signaleert "onmogelijke" tussenresultaten maar is niet in staat deze weg te werken;
maakt meerdere fouten (al dan niet door slordigheid);
geeft wel enige tekstuitleg maar zeker niet voldoende;
gebruikt verwerpelijke notaties.

2pt Weet ongeveer wat te doen maar lijdt aan gebrek aan vaardigheid en/of inzicht;
mist belangrijke gevalsonderscheidingen of uitzonderingen etc.;
herkent evident foute tussenresultaten niet;
toont onvoldoende vaardigheid/controle/zelfreflectie.
Een combinatie van meerdere bij 3pt genoemde tekortkomingen kan ook leiden tot deze normering.

1pt Aardig beginnetje, maar het levert niet echt wat op.

0pt Geen idee wat te doen, dit wordt niks; of: toelichting bij formules ontbreekt volledig (en de opgave vereiste meer dan alleen simpel rekenwerk).

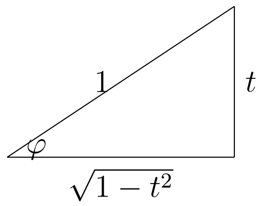
NB: indien *ernstige* fouten gemaakt worden op het gebied van vwo-voorkennis (kettingregel vergeten, slechte beheersing gonio, ...) kan de normering een punt lager uitvallen dan anders het geval zou zijn geweest.

1. Vind alle $z \in \mathbb{C}$ die voldoen aan $z^4 + 2z^3 + 4z^2 - 2z - 5 = 0$. 4 pt.

Oplossing: Door proberen zien we dat $z = 1$ en $z = -1$ allebei voldoen. Dit betekent dat de gegeven veelterm deelbaar moet zijn door $z^2 - 1$. We voeren de deling uit en vinden dat $z^4 + 2z^3 + 4z^2 - 2z - 5 = (z^2 - 1)(z^2 + 2z + 5)$. Van de laatste factor $z^2 + 2z + 5$ vinden we de nulpunten met de *abc*-formule of door kwadraat afsplitsen: het zijn $z = -1 \pm 2\mathrm{i}$. Dus de gevraagde nulpunten zijn $z = \pm 1$ en $z = -1 \pm 2\mathrm{i}$.

2. Vereenvoudig $\cos(\arcsin t)$. Gebruik hierbij een schets. 4 pt.

Oplossing: Teken een rechthoekige driehoek met schuine zijde 1, vertikale rechthoekszijde t, en noem de hoek daartegenover φ. Dan geldt $\sin\varphi = t$ oftewel $\arcsin t = \varphi$. Met de stelling van Pythagoras vinden we de aanliggende rechthoekszijde $\sqrt{1-t^2}$. We concluderen $\cos\arcsin t = \cos\varphi = \sqrt{1-t^2}$.



3. Zij $f(x) = \mathrm{e}^{x^2-2x}$. Geef een rationale benadering van $f(\frac{1}{2})$ met behulp van een derde-orde Taylorveelterm van f en steunpunt 0. 4 pt.

Oplossing: Het derde orde Taylorpolynoom met steunpunt 0 van een functie f is

$$T_3(x) = f(0) + f'(0)x + \tfrac{1}{2}f''(0)x^2 + \tfrac{1}{6}f'''(0)x^3.$$

In de opgave wordt $T_3(\frac{1}{2})$ gevraagd. Hier hebben we achtereenvolgens:

$f(x) = \mathrm{e}^{x^2-2x}$ dus $f(0) = \mathrm{e}^0 = 1$;

$f'(x) = (2x-2)f(x)$ dus $f'(0) = -2f(0) = -2$;

$f''(x) = 2f(x) + (2x-2)f'(x)$ dus $f''(0) = 2f(0) - 2f'(0) = 2 + 4 = 6$;

$f'''(x) = 2f'(x) + 2f'(x) + (2x-2)f''(x)$ dus $f'''(0) = 4f'(0) - 2f''(0) = -8 - 12 = -20$.

Dus de Taylorbenadering is

$$T_3(\tfrac{1}{2}) = 1 - 2\cdot\tfrac{1}{2} + \tfrac{6}{2}(\tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{20}{6}(\tfrac{1}{2})^3 = 1 - 1 + \tfrac{3}{4} - \tfrac{5}{12} = \tfrac{1}{3}.$$

4. We bekijken de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ welke is gegeven door 4 pt.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \log \frac{1}{|x|} & \text{als } x \neq 0, \\ 0 & \text{als } x = 0. \end{cases}$$

Je mag aannemen dat f continu is in $x = 0$. Onderzoek of f ook differentieerbaar is in $x = 0$, en bepaal indien mogelijk $f'(0)$.

> **Oplossing:** De afgeleide in $x = 0$ is per definitie
>
> $$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x},$$
>
> mits de limiet bestaat. Nadat we het voorschrift voor f invullen, krijgt de limiet de gedaante
>
> $$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \log \frac{1}{|x|} - 0}{x}.$$
>
> Dit kunnen we vereenvoudigen met de logaritmeregel $\log(1/x) = -\log x$: we krijgen dan
>
> $$-\lim_{x \to 0} x \log |x|.$$
>
> Nu herinneren we ons de standaardlimiet $\lim_{x \to 0+} x^a \log x = 0$ voor alle $a > 0$. Om deze netjes toe te passen bekijken we de linker en rechter limieten afzonderlijk. Voor $x > 0$ hebben we
>
> $$-\lim_{x \to 0+} x \log x = 0,$$
>
> en voor $x < 0$ hebben we
>
> $$\lim_{x \to 0-} (-x) \log(-x) = 0.$$
>
> Conclusie: $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ bestaat en is gelijk aan 0. Aangezien de limiet bestaat, bestaat ook $f'(0)$, bovendien zien we $f'(0) = 0$.

5. Laat met de definitie van de complexe e-macht zien dat 4 pt.

$$\cos(3t) = 4\cos^3 t - 3\cos t \quad \text{en}$$
$$\sin(3t) = 3\sin t - 4\sin^3 t.$$

Oplossing: Met de definitie kunnen we e^{3ti} op twee manieren uitschrijven. Enerzijds geldt

$$e^{3ti} = \cos 3t + i \sin 3t. \tag{1}$$

Anderzijds geldt ook

$$\begin{aligned} e^{3ti} &= (e^{ti})^3 \\ &= (\cos t + i \sin t)^3 \\ &= (\cos^3 t - 3\cos t \sin^2 t) + i(3\cos^2 t \sin t - \sin^3 t). \end{aligned}$$

Dit moet voor alle t gelijk zijn aan de uitdrukking (1), waaruit we concluderen dat de reele en imaginaire delen van beide overeen moeten komen:

$$\begin{aligned} \cos 3t &= \cos^3 t - 3\cos t \sin^2 t \\ &= \cos^3 t - 3\cos t(1 - \cos^2 t) = 4\cos^3 t - 3\cos t, \text{ en} \\ \sin 3t &= 3\cos^2 t \sin t - \sin^3 t \\ &= 3(1 - \sin^2 t)\sin t - \sin^3 t = 3\sin t - 4\sin^3 t. \end{aligned}$$

Dat is precies wat we moesten laten zien.

6. Bereken $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{16 - x^2}}\,dx$. 4 pt.

Oplossing: Deze integraal kan met substitutie of ook partieel.

De meesten kiezen substitutie. We substitueren $x = 4\sin u$ en daarbij $dx = 4\cos u\,du$. Voor later merken we alvast op dat $\cos u = \sqrt{1 - (\frac{x}{4})^2}$. Na substitutie en een beetje vereenvoudigen krijgen we:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{16 - x^2}}\,dx = 64 \int \sin^3 u\,du,$$

waarin we de integrand kunnen herschrijven als

$$\sin^3 u = (1 - \cos^2 u)\sin u,$$

waardoor de integraal uiteenvalt in twee makkelijke delen:

$$\begin{aligned}\int \sin^3 u \,\mathrm{d}u &= \int \sin u \,\mathrm{d}u - \int \cos^2 u \sin u \,\mathrm{d}u \\ &= -\cos u + \tfrac{1}{3}\cos^3 u \\ &= -\tfrac{1}{3}\cos u(2+\sin^2 u).\end{aligned}$$

(De integratieconstante voegen we aan het eind wel toe). Nu kunnen we terugsubstitueren:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{\sqrt{16-x^2}}\,\mathrm{d}x &= -\tfrac{64}{3}\cos u(2+\sin^2 u) \\ &= -\tfrac{64}{3}\sqrt{1-(\tfrac{x}{4})^2}(2+(\tfrac{x}{4})^2) \\ &= -\tfrac{1}{3}\sqrt{16-x^2}(32+x^2)+C.\end{aligned}$$

Partieel gaat als volgt. Schrijf de integraal als

$$\int (x^2)(\frac{x}{\sqrt{16-x^2}})\,\mathrm{d}x.$$

De tweede factor in de integrand heeft een primitieve $-\sqrt{16-x^2}$. Partieel integreren geeft daarom

$$-x^2\sqrt{16-x^2}+\int 2x\sqrt{16-x^2}.$$

De overblijvende integraal is gemakkelijk te herkennen (indien niet: subs $u=x^2$), en geeft als eindantwoord

$$-x^2\sqrt{16-x^2}-\tfrac{2}{3}(16-x^2)^{3/2}+C,$$

wat na een beetje herschrijven hetzelfde antwoord als boven blijkt te zijn.

7. Bereken 4 pt.

$$\int_{2017}^{2018} x(x-2017)^{2016}\,\mathrm{d}x,$$

en vereenvoudig het antwoord tot één eenvoudige breuk.

Oplossing: Ook deze kan op twee manieren: partieel of met substitutie. We zullen beide uitwerken voor de integraal

$$\int_{a+1}^{a+2} x(x-a-1)^a \,\mathrm{d}x,$$

met $a > 0$ (je kunt uiteraard de hele uitwerking geven met $a = 2016$ maar ik vind dit leuker).

Partieel:

$$\begin{aligned}\int x(x-a-1)^a \,\mathrm{d}x &= \frac{x(x-a-1)^{a+1}}{a+1} - \int \frac{(x-a-1)^{a+1}}{a+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x(x-a-1)^{a+1}}{a+1} - \frac{(x-a-1)^{a+2}}{(a+1)(a+2)} \\ &= \frac{(x-a-1)^{a+1}}{a+1}\left(x - \frac{x-a-1}{a+2}\right) \\ &= \frac{(x-a-1)^{a+1}}{a+1}\,\frac{(a+1)(x+1)}{a+2} \\ &= \frac{(x-a-1)^{a+1}(x+1)}{a+2}.\end{aligned}$$

Dus de bepaalde integraal evalueert tot:

$$\int_{a+1}^{a+2} x(x-a-1)^a \,\mathrm{d}x = \left.\frac{(x-a-1)^{a+1}(x+1)}{a+2}\right|_{a+1}^{a+2} = \frac{a+3}{a+2}.$$

Tot slot nemen we $a = 2016$ zodat we krijgen:

$$\int_{2017}^{2018} x(x-2017)^{2016} \,\mathrm{d}x = \frac{2019}{2018}.$$

Substitutie: neem $u = x - a - 1$, dan is $x = u + a + 1$ en $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$. De grenzen veranderen van $x = a + 1$ in $u = 0$ en van $x = a + 2$ in $u = 1$. We krijgen dus

$$\begin{aligned}\int_0^1 (u+a+1)u^a \,\mathrm{d}u &= \int_0^1 u^{a+1} + (a+1)u^a \,\mathrm{d}u \\ &= \tfrac{1}{a+2}u^{a+2} + u^{a+1}\Big|_0^1 \\ &= \tfrac{1}{a+2} + 1 = \tfrac{a+3}{a+2},\end{aligned}$$

net als boven maar met minder werk.

8. Los het beginwaardeprobleem op: 4 pt.

$$\begin{aligned} x^2y' + 9y &= 0, \\ y(1) &= \frac{1}{27}. \end{aligned}$$

Oplossing: Scheiden van de variabelen gevolgd door integreren levert

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int -\frac{9}{x^2}\mathrm{d}x.$$

We evalueren de integralen en krijgen

$$\log|y| = \frac{9}{x} + C,$$

en dus na exponentieren:

$$|y| = C\mathrm{e}^{9/x}.$$

Als beginwaarde hebben we $y(1) = \frac{1}{27} > 0$. Dit betekent dat $y > 0$ voor alle x (immers: $y = 0$ is een evenwichtsoplossing die niet bereikt of gepasseerd kan worden). De algemene oplossing is dus

$$y = C\mathrm{e}^{9/x},$$

waarin we C bepalen door de beginwaarde in te vullen:

$$y(1) = \tfrac{1}{27} = C\mathrm{e}^9,$$

dus $C = \frac{1}{27\mathrm{e}^9}$. De oplossing van het beginwaardeprobleem is dus

$$y(x) = \tfrac{1}{27}\mathrm{e}^{9/x-9} = \tfrac{1}{27}\mathrm{e}^{9(1/x-1)}.$$

9. Zij f een functie met de volgende eigenschappen: het domein is $\mathbb{R}$, f is oneven, en $f(x) > 0$ als $x > 0$. We definiëren

$$g(x) = \int_0^{\sin x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

a. Bepaal bij welke waarden van x de functie $g(x)$ een (lokaal) extreme waarde heeft. 4 pt.

Oplossing: De functie f is gedefinieerd op heel $\mathbb{R}$. Dus volgens de hoofdstelling geldt dat g differentieerbaar is op heel $\mathbb{R}$ en dat de afgeleide is $g'(x) = f(\sin x)\cos x$ (let op, kettingregel hier niet vergeten!). De enige punten waar g een extreme waarde kan hebben zijn dus de punten waarvoor geldt $g'(x) = f(\sin x)\cos x = 0$. Maar f is oneven, met strikt positieve waarden als $x > 0$, dus $f(0) = 0$ en $f(x) < 0$ als $x < 0$. We concluderen hieruit dat $g'(x) = 0$ precies dan als $\sin x = 0$ of $\cos x = 0$, dus de extremen van g treden op bij $x = k\pi$ en $x = (k + \frac{1}{2})\pi$ met $k \in \mathbb{Z}$.

b. Laat zien dat $g(x) \geq 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. (Kan met of zonder vraag a!) 4 pt.

Oplossing: Mét de a-vraag: we constateerden dat g extremen heeft in $x = k\pi$ en in $x = (k + \frac{1}{2})\pi$. De afgeleide $g'(x) = f(\sin x)\cos x$ heeft nabij $x = k\pi$ het tekenverloop van $-$ via 0 naar $+$ (immers: als x net iets kleiner dan $k\pi$ dan is $\sin x < 0$, dus ook $f(\sin x) < 0$, en $\cos x > 0$, etc etc). Alleen in een minimum komt dit tekenverloop voor, dus g neemt minima aan in $k\pi$, met bijbehorende functiewaarden $g(k\pi) = 0$. Volgens een zelfdesoort redenering kunnen we laten zien dat f maxma heeft in $x = (k + \frac{1}{2})\pi$. Dus $g(x) \geq 0$ voor alle x.

Zonder a-vraag: We onderscheiden drie afzonderlijke mogelijkheden naar het teken van $\sin x$:

- Als $\sin x = 0$ dan heeft het integratie-interval in de definitie van g lengte 0, zodat $g(x) = 0$. Dit doet zich voor als $x = k\pi$ (dit zijn kritieke punten; een verdere uitwerking van onderdeel a zou bevestigen dat het minima zijn).
- Als $\sin x > 0$ dan integreren we over een interval van 0 tot $\sin x > 0$; op dit interval is volgens de gegevens f positief; dus $g(x) > 0$. Dit doet zich voor als x in een interval $(2k\pi, (2k+1)\pi)$ zit.
- Als $\sin x < 0$ dan integreren we over een interval van 0 tot $\sin x < 0$. Met de grenzen in de gebruikelijke volgorde (integre-

ren van klein naar groot) hebben we dan

$$g(x) = \int_0^{\sin x} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{\sin x}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Op dit interval is de oneven functie f negatief. Vanwege het minteken voor de integraal krijgen we dus ook in dit geval $g(x) > 0$. Dit doet zich voor als x in een interval $((2k-1)\pi, 2k\pi)$ zit.

Concluderend: voor geen enkele waarde van x is $g(x) < 0$, waaruit het gestelde volgt.

c. (Bonusvraag) Onderzoek of de integraal **bonus** 2 pt.

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^{1-g(x)}}$$

convergent of divergent is.

Oplossing: Aangezien $g(x) \geq 0$, is $1 - g(x) \leq 1$. We weten dat $x \geq x^a$ als $x > 1$ en $a \leq 1$. Hieruit volgt $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{x^a}$ onder dezelfde voorwaarden. Maar $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ is divergent (standaardvoorbeeld, zie boek) en dus is volgens stelling in boek ook $\int_1^\infty x^{g(x)-1}\,\mathrm{d}x$ divergent.