Dit tentamen is in elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat. A–Eskwadraat kan niet aansprakelijk worden gesteld voor de gevolgen van eventuele fouten in dit tentamen.

Uitwerkingen van het tentamen

April 20, 2013

Opgave 1a

Aantal punten voor dit onderdeel: 6

We hebben, voor $a, b \geq c$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > a \text{ en } Y > b) &= \int_a^\infty \int_b^\infty \frac{1}{(x+y)^3} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_a^\infty \left[-\frac{1}{2(x+y)^2}\right]_b^\infty \mathrm{d}x = \int_a^\infty \frac{1}{2(x+b)^2} \mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{1}{2(x+b)}\right]_a^\infty = \frac{1}{2(a+b)}.\end{aligned}$$

Opgave 1b

Aantal punten voor dit onderdeel: 6

Als $x < c$ dan is $\mathbb{P}(X \leq x) = 0$ vanwege het feit dat $f(x,y)$ gelijk aan nul is als $x < c$.
Als $x \geq c$ dan is:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = 1 - \mathbb{P}(X > x) = 1 - \mathbb{P}(X > x \text{ en } Y > c) = 1 - \frac{1}{2(x+c)},$$

waarbij we (a) gebruikt hebben voor de laatste gelijkheid.

Opgave 1c

Aantal punten voor dit onderdeel: 6

Vanwege de vorm van de gemeenschappelijke dichtheid f moet gelden dat $\mathbb{P}(X > c \text{ en } Y > c) = 1$. Dus, met onderdeel (a):

$$1 = \frac{1}{2(c+c)},$$

oftewel $4c = 1$. Dus $c = \frac{1}{4}$.

Opgave 1d

Aantal punten voor dit onderdeel: 6

X, Y zijn **afhankelijk**.

Want:

X, Y zijn onafhankelijk d.e.s.d.a geldt voor alle $a, b \in \mathbb{R}$ dat $\mathbb{P}(X \leq a, Y \leq b) = \mathbb{P}(X \leq a)\mathbb{P}(Y \leq b)$.

Merk op dat, voor $a, b > c$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq a \text{ en } Y \leq b) &= 1 - \mathbb{P}(X > a \text{ of } Y > b) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X > a) - \mathbb{P}(Y > b) + \mathbb{P}(X > a \text{ en } Y > b) \\ &= 1 - \tfrac{1}{2(a+c)} - \tfrac{1}{2(c+b)} + \tfrac{1}{2(a+b)}. \end{aligned}$$

Aan de andere kant is:

$$\mathbb{P}(X \leq a)\mathbb{P}(Y \leq b) = \left(1 - \frac{1}{2(a+c)}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2(c+b)}\right) = 1 - \frac{1}{2(a+c)} - \frac{1}{2(c+b)} + \frac{1}{4(a+c)(c+b)}.$$

Als X, Y onafhankelijk zijn, dan moet dus gelden, voor alle $a, b \geq c$ dat:

$$\frac{1}{2(a+b)} = \frac{1}{4(a+c)(c+b)}.$$

Dit is equivalent met $a + b = 2(a+c)(c+b)$ voor alle $a, b \geq c$.

Als je het antwoord in (c) goed had dan kun je nu bijvoorbeeld invullen $a = b = 1$. Uit $1 + 1 \neq 2(1 + \frac{1}{4})(1 + \frac{1}{4})$ volgt dan dat X, Y niet onafhankelijk kunnen zijn.

Als je het antwoord in (c) niet hebt kunnen vinden, dan kun je bijvoorbeeld als volgt redeneren: Kies $a = b > c$. Als X, Y onafhankelijk zijn dan moet dus gelden $2a = 2(a+c)^2$ voor elke $a > 0$. Oftewel, $2a^2 + (2 - 4c)a + 2c^2 = 0$ voor *elke* $a > c$. Dit laatste is een tweedegraads vergelijking in a waarvan de coefficient van a^2 niet nul is. Deze vergelijking heeft dus ten hoogste 2 oplossingen, en zeker niet oneindig veel oplossingen. Tegenspraak!

X, Y moeten dus wel afhankelijk zijn.

Opgave 1e

Aantal punten voor dit onderdeel: 6

Uit (b) volgt dat de kansdichtheid van X gegeven wordt door:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(x+c)^2} & \text{als } x \geq c, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

De verwachting van X is dus:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) \mathrm{d}x = \int_c^{\infty} \frac{x}{2(x+c)^2} \mathrm{d}x = \int_c^{\infty} \frac{1}{2(x+c)} - \frac{c}{2(x+c)^2} \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{2}\ln(x+c) + \frac{c}{2(x+c)}\right]_c^{\infty} = \infty \end{aligned}$$

Opgave 2a

Aantal punten voor dit onderdeel: 4

De kansdichtheid van X_1 is:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{als } x > 0 \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

De verwachting van een exponentieel (λ) verdeelde stochast is gelijk aan $1/\lambda$. Dit moet gelijk zijn aan 30, dus $\lambda = 1/30$.

Opgave 2b

Aantal punten voor dit onderdeel: 4

We hebben

$$F_M(x) = \mathbb{P}(M \leq x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x, \ldots, X_n \leq x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x) \ldots \mathbb{P}(X_n \leq x) = (\mathbb{P}(X_1 \leq x))^n = \left(1 - e^{-\lambda x}\right)^n.$$

(De tweede gelijkheid volgt uit het feit dat M het maximum is; voor de derde en vierde gelijkheid hebben we gebruikt dat de X_i-tjes i.i.d. zijn, en in de laatste gelijkheid hebben we de cdf van X_1 ingevuld.)

De kandichtheid is

$$f_M = F_M' = n\lambda e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x})^{n-1}.$$

Opgave 2c

Aantal punten voor dit onderdeel: 4

Voor elke $k \in \mathbb{N}$ geldt dat

$$\mathbb{P}(Y_i > k) = \mathbb{P}(\lceil X_i \rceil > k) = \mathbb{P}(X_i > k) = e^{-\lambda k}.$$

Merk ook op dat $\mathbb{P}(Y_i > 0) = 1 = e^{-\lambda \cdot 0}$. We kunnen voor elke $k \in \mathbb{N}$ schrijven:

$$\mathbb{P}(Y_i = k) = \mathbb{P}(Y_i > k - 1) - \mathbb{P}(Y_i > k) = e^{-\lambda(k-1)} - e^{-\lambda k} = e^{-\lambda(k-1)}(1 - e^{-\lambda}).$$

Deze laatste uitdrukking herkennen we als de kansdichtheid van een geometrische verdeling met parameter $p = 1 - e^{-\lambda}$.

Opgave 2d

Aantal punten voor dit onderdeel: 3

Laat $a, b \in \mathbb{N}$ willekeurig zijn. Dan:

$$\mathbb{P}(Y_i > a + b | Y_i > b) = \frac{\mathbb{P}(Y_i > a + b)}{\mathbb{P}(Y_i > b)} = \frac{(1-p)^{a+b}}{(1-p)^b} = (1-p)^a = \mathbb{P}(Y_i > a).$$

Opgave 2e

Aantal punten voor dit onderdeel: 3

Stel Y is geheugenvrij en neemt alleen waarden aan in $\mathbb{N}$. Dan is, voor elke $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(Y > k + 1 | Y > k) = \frac{\mathbb{P}(Y > k + 1)}{\mathbb{P}(Y > k)} = \mathbb{P}(Y > 1).$$

Oftewel,

$$\mathbb{P}(Y > k + 1) = \mathbb{P}(Y > k)\mathbb{P}(Y > 1).$$

Herhaaldelijk toepassen van deze vergelijking, geeft, voor elke $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(Y > k) = (\mathbb{P}(Y > 1))^k .$$

Merk op dat ook $\mathbb{P}(Y > 0) = 1 = (\mathbb{P}(Y > 1))^0$. We kunnen dus weer schrijven, voor elke $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(Y > k-1) - \mathbb{P}(Y > k) = (\mathbb{P}(Y > 1))^{k-1} (1 - \mathbb{P}(Y > 1)).$$

Dit herkennen we als de kansdichtheid van een geometrische verdeling met parameter $p = 1-\mathbb{P}(Y > 1) = \mathbb{P}(Y = 1)$).

Opgave 2f

Aantal punten voor dit onderdeel: 4

Merk op dat $M' = \lceil M \rceil$. Dus geldt, voor elke $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(M' \leq k) = \mathbb{P}(M \leq k) = \left(1 - e^{-\lambda k}\right)^n .$$

(waar we (b) hebben gebruikt.)

Opgave 2g

Aantal punten voor dit onderdeel: 4

Merk op dat de uitdrukking uit (f) ook correct is als $k = 0$. We hebben dus, voor elke $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(M' = k) = \mathbb{P}(M' \leq k) - \mathbb{P}(M' \leq k-1) = (1-e^{-\lambda k})^2 - (1-e^{-\lambda(k-1)})^2 = 2e^{-\lambda(k-1)} - 2e^{-\lambda k} + e^{-2\lambda k} - e^{-2\lambda(k-1)}.$$

Opgave 2h

Aantal punten voor dit onderdeel: 4

Aan het begin van de tontine betaalt elke deelnemer de inleg van a en daarna wordt elk jaar een totaal bedrag van b uitbetaald, tot in het jaar waarin de laatste persoon is overleden (dus we betalen $M' - 1$ maal een bedrag van b uit). De verwachte winst is dus $a \cdot n - b(\mathbb{E}M' - 1)$, waar $n = 2, a = 40, b = n = 2$. Dus de verwachte winst is $82 - 2\mathbb{E}M'$.

De verwachting $\mathbb{E}M'$ rekenen we als volgt uit:

$$\mathbb{E}M' = \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}(M' = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(2e^{-\lambda(k-1)} - 2e^{-\lambda k} + e^{-2\lambda k} - e^{-2\lambda(k-1)}\right).$$

Deze som kun je op een aantal manieren uitrekenen. Eén manier is als volgt. Merk op dat $e^{-\lambda(k-1)} - e^{-\lambda k} = e^{-\lambda(k-1)}(1-e^{-\lambda})$ en $e^{-2\lambda(k-1)} - e^{-2\lambda k} = e^{-2\lambda(k-1)}(1-e^{-2\lambda})$ deze uitdrukkingen herkennen we als de kansdichtheid van de geometrische verdeling met parameters $p_1 := 1 - e^{-\lambda}$ en $p_2 := 1 - e^{-2\lambda}$. Als $X_1 \sim \text{geom}(p_1)$ en $X_2 \sim \text{geom}(p_2)$ dan kunnen we dus schrijven:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}M' &= \sum_{k=1}^{\infty} k\left(2\mathbb{P}(X_1 = k) - \mathbb{P}(X_2 = k)\right) = 2\sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}(X_1 = k) - \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}(X_2 = k) \\
&= 2\mathbb{E}X_1 - \mathbb{E}X_2 = \frac{2}{p_1} - \frac{1}{p_2} = \frac{2}{1 - e^{-\lambda}} - \frac{1}{1 - e^{-2\lambda}}.
\end{aligned}$$

Omdat $1 - e^{-2\lambda} = (1 - e^{-\lambda})(1 + e^{-\lambda})$ kunnen we dit verder vereenvoudigen tot:

$$\mathbb{E}M' = \frac{2(1+e^{-\lambda})-1}{1-e^{-2\lambda}} = \frac{1+2e^{-\lambda}}{1-e^{-2\lambda}}.$$

De verwachte winst is dus:

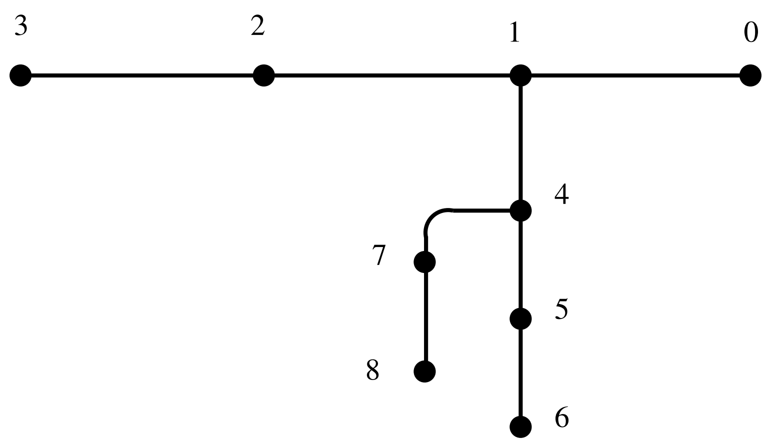
$$82 - \frac{2+4e^{-1/30}}{1-e^{-1/15}} \text{ (dukaten).}$$

(Dit blijkt overigens negatief te zijn – het schatten van het antwoord werd niet verwacht van jullie tijdens het tentamen.)

Opgave 3a

Aantal punten voor dit onderdeel: 8

We nummeren de metrostations als volgt:



Laat nu p_i de kans zijn dat ze in station 3 aankomt zonder ooit station 0 aan te doen, als ze in station i start. Het gezochte stelsel is dan:

$$\begin{aligned}
&p_3 = 1,\\
&p_0 = 0,\\
&p_1 = \tfrac{1}{3}(p_0 + p_2 + p_4),\\
&p_2 = \tfrac{1}{2}(p_1 + p_3),\\
&p_4 = \tfrac{1}{3}(p_1 + p_5 + p_7),\\
&p_5 = \tfrac{1}{2}(p_4 + p_6),\\
&p_6 = p_5,\\
&p_7 = \tfrac{1}{2}(p_4 + p_8),\\
&p_8 = p_7.
\end{aligned}$$

We zoeken p_6.

Opgave 3b

Aantal punten voor dit onderdeel: 8

We vereenvoudigen het stelsel eerst met de truc uit de uitwerkingen van het oefententamen.
Uit $p_6 = p_5$ en $p_5 = \frac{1}{2}(p_4 + p_6)$ volgt $p_5 = p_4$.
Uit $p_8 = p_7$ en $p_7 = \frac{1}{2}(p_4 + p_8)$ volgt $p_7 = p4$.
Uit $p_5 = p_4 = p_7$ en $p_4 = \frac{1}{3}(p_1 + p_5 + p_7)$ volgt $p_4 = p_1$.

Uit $p_4 = p_1$ en $p_1 = \frac{1}{3}(p_0 + p_2 + p_4)$ volgt $p_1 = \frac{1}{2}(p_0 + p_2)$.

We kunnen dus p_6 vinden door p_1 op te lossen uit het simpelere stelsel:

$$\begin{aligned} p_3 &= 1, \\ p_0 &= 0, \\ p_1 &= \tfrac{1}{2}(p_0 + p_2), \\ p_2 &= \tfrac{1}{2}(p_1 + p_3). \end{aligned}$$

Dit kun je oplossen met de methode uit de handout, maar ook makkelijk “met de hand”. Uit $p_0 = 0, p_1 = \frac{1}{2}(p_0 + p_2)$ volgt $p_1 = p_2/2$.
Dan moet dus gelden $p_2 = \frac{1}{2}(p_2/2 + 1)$, oftwel $\frac{3}{4}p_2 = \frac{1}{2}$, oftewel $p_2 = \frac{2}{3}$.
Dus de gezochte kans is $p_6 = p_1 = p_2/2 = \frac{1}{3}$.

Opgave 3c

Aantal punten voor dit onderdeel: 7

Als de studente al het geld van de controleurs heeft bemachtigd, dan bedraagt haar vermogen dus $N + 100$ eenheden van de lokale valuta.

Het spel is precies de gambler’s ruin uit de handout met kans $p = .51$ op winst, een startkapitaal van 100 en een bovengrens van $N + 100$.

De relevante berekeningen kun je vinden in de handout.
(**nota bene:** op het tentamen was het wel de bedoeling deze berekingen zelf te maken en niet gewoon naar de handout te verwijzen.)

Opgave 3d

Aantal punten voor dit onderdeel: 7

Laat E de eventualiteit zijn dat de studente ooit een vermogen van 0 bereikt (en dus gefusilleerd wordt), en laat E_N de eventualiteit zijn dat ze een vermogen van 0 bereikt voordat ze een vermogen van N bereikt.

Dan hebben we

$$E = \bigcup_{N>100} E_N.$$

Want: als ze een vermogen van 0 bereikt voordat ze een vermogen van N bereikt (voor één of andere $N \in \mathbb{N}$) dan heeft ze in elk geval ooit een vermogen van 0 bereikt (dit bewijst $\bigcup_{N>100} E_N \subseteq E$); en als ze een vermogen van 0 bereikt binnen eindige tijd, dan is er een bedrag N zodat haar vermogen nooit N is geweest (dit bewijst $E \subseteq \bigcup_{N>100} E_N$).

Het is duidelijk dat $E_N \subseteq E_{N+1}$ voor alle N, zodat we mogen schrijven:

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(\bigcup_{N>100} E_N) = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(E_N) = \lim_{N\to\infty} 1 - \frac{1 - (49/51)^{100}}{1 - (49/51)^{N+100}} = (49/51)^{100}.$$

De kans dat ze nooit wordt gefusilleerd is dus $1 - \mathbb{P}(E) = 1 - (49/51)^{100}$.
(Dit is overigens ongeveer .98 – het schatten van deze kans werd niet van jullie verwacht in het tentamen.)