Hertentamen Inleiding Kansrekening en Statistiek

22 mei 2013, 13.30 – 16.30

- Elke opgave dient **op een apart blad** ingeleverd te worden.
- Zet **op elk blad** je naam en studentnummer.
- Het gebruik van rekenmachines, het boek, aantekeningen of andere hulpmiddelen is absoluut niet toegestaan.
- Geef telkens een beknopt bewijs van je antwoord of een berekening/toelichting, tenzij duidelijk in de opgave staat aangegeven dat dit niet hoeft.
- **NOTA BENE:** het gebruiken van aparte bladen voor elke opgave met daarop telkens je naam en studentnummer is 10 van de 100 punten waard.

Opgave 1, (punten: a: 6, b: 6, c: 6, d: 6, e: 6).
De stochasten X en Y hebben gemeenschappelijke kansdichtheid gegeven door:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c \cdot (x+2y) \cdot e^{-(x+y)} & \text{als } x \geq 0 \text{ en } y \geq 0, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

(Hier is $c > 0$ een nog nader te bepalen constante.)

(a) Laat zien dat de marginale verdelingen van X en Y gegeven worden door:

$$F_X(x) = \begin{cases} c \cdot (3 - (3+x)e^{-x}) & \text{als } x \geq 0, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

en

$$F_Y(y) = \begin{cases} c \cdot (3 - (3+2y)e^{-y}) & \text{als } y \geq 0, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

(b) Wat is de waarde van c?

(c) Zijn X en Y afhankelijk of onafhankelijk?
(Motiveer je antwoord.)

(d) Bereken $\mathbb{E}X$ en $\mathbb{E}Y$.

(e) Bereken $\mathbb{P}(Y > X)$.

Opgave 2, (punten: a: 6, b: 6, c: 6, d: 6, e: 6)
Tijdens de collegvrije week verveelt de studente Alice zich en stelt om de tijd te doden het volgende spelletje voor aan haar broertje Bob. Ze gooien net zo vaak met een muntje totdat ofwel het patroon KKM – dwz. kop, kop, munt – ofwel het patroon KMM voorkomt.
Als het patroon KKM het eerst voorkomt dan wint Alice and als KMM het eerst voorkomt dan wint Bob. Dus als de uitkomsten van de eerste 9 worpen bijvoorbeeld $K, M, K, K, K, M, K, K, M$ waren dan heeft Alice gewonnen.
Verondersteld mag worden dat de munt die ze gebruiken zuiver is. We zijn natuurlijk geïnteresseerd in de kans op de gebeurtenis A dat Alice het spel wint. Laat hiertoe $W_i \in \{K, M\}$ voor $i = 1, 2, \ldots$ de uitkomst van de i-de worp zijn.

(a) Geef een (beknopte) beredenering van de volgende vergelijkingen:

$$\mathbb{P}(A|W_1 = K, W_2 = K, W_3 = M) = 1,$$

$$\mathbb{P}(A|W_1 = K, W_2 = M, W_3 = M) = 0,$$

en, voor alle $(x, y, z) \in \{K, M\}^3 \setminus \{(K, M, M), (K, K, M)\}$:

$$\mathbb{P}(A|W_1 = x, W_2 = y, W_3 = z) = \mathbb{P}(A|W_1 = y, W_2 = z).$$

(Hint: een paar zinnen volstaan als toelichting.)

(b) Laat met behulp van het vorige onderdeel zien dat

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A|W_1 = K, W_2 = K) &= \frac{1}{2}\Big(\mathbb{P}(A|W_1 = K, W_2 = K) + 1\Big),\\
\mathbb{P}(A|W_1 = K, W_2 = M) &= \frac{1}{2}\Big(\mathbb{P}(A|W_1 = M, W_2 = K) + 0\Big),\\
\mathbb{P}(A|W_1 = M, W_2 = K) &= \frac{1}{2}\Big(\mathbb{P}(A|W_1 = K, W_2 = K) + \mathbb{P}(A|W_1 = K, W_2 = M)\Big),\\
\mathbb{P}(A|W_1 = M, W_2 = M) &= \frac{1}{2}\Big(\mathbb{P}(A|W_1 = M, W_2 = K) + \mathbb{P}(A|W_1 = M, W_2 = M)\Big).
\end{aligned}$$

(c) Laat met behulp van het vorige onderdeel zien dat $\mathbb{P}(A) = \frac{2}{3}$.

Nadat ze het spel een flink aantal keren hebben gespeeld valt het Bob op dat hij toch wel erg vaak verliest. Hij googlet wat en komt erachter dat het spel van Alice ook wel bekend staat als "Penney's ante"naar de Amerikaanse wiskundige Walter Penney die het in 1969 bedacht, en dat Alice inderdaad een behoorlijk voordeel heeft bij het spel.

Om zijn zusje terug te pakken stelt hij de volgende variant voor. Voor het spel begint kiezen beide spelers één van de mogelijke 8 patronen van 3 letters K en M. Vervolgens gooien ze weer net zo lang met een zuivere munt totdat één van beide patronen voorkomt en wint degene wiens patroon als eerste voorkomt, net als eerst. Bob vraagt altijd eerst aan Alice welk patroon zij heeft gekozen voordat hij zijn patroon kiest. Hij houdt bij zijn keuze de volgende tabel aan:

Keuze van Alice:	KKK	KKM	KMK	KMM	MKK	MKM	MMK	MMM
Antwoord van Bob:	MKK	MKK	KKM	KKM	MMK	MMK	KMM	KMM

Uit de tabel valt op te maken, dat telkens als de keuze van Alice begint met KK (dus als Alice KKM of KKK kiest), dat Bob's antwoord dan MKK is.

(d) Stel dat Alice ofwel KKM ofwel KKK heeft gekozen, en dat Bob dus MKK heeft gekozen. Laat B de gebeurtenis zijn dat Bob wint. Geef een beknopte beredenering van de ongelijkheid:

$$\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(W_1 = M) + \mathbb{P}(W_1 = K, W_2 = M),$$

en merk op dat hieruit volgt dat $\mathbb{P}(B) > \frac{1}{2}$.
(Hint: merk bijvoorbeeld op dat als de uitkomst van de eerste worp M is, het patroon van Bob voorkomt zodra er twee keer achterelkaar K geworpen is.)

(**Opmerking:** Als Alice MMK of MMM kiest, dan kiest Bob volgens de tabel KMM. Uit symmetrieoverwegingen en onderdeel (d) volgt dat Bob in dat geval ook wint met kans $> \frac{1}{2}$.)

(e) Stel dat Alice MKM kiest en dat Bob (conform de tabel) MMK kiest. Laat B weer de gebeurtenis zijn dat Bob wint. Beredeneer dat in dit geval

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) \quad \geq \quad & \mathbb{P}(W_1 = M, W_2 = K, W_3 = K, W_4 = M, W_5 = M) \\ & + \mathbb{P}(W_1 = M, W_2 = M) \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(W_1 = \cdots = W_k = K, W_{k+1} = M, W_{k+2} = M),\end{aligned}$$

en laat zien dat dus $\mathbb{P}(B) > \frac{1}{2}$.

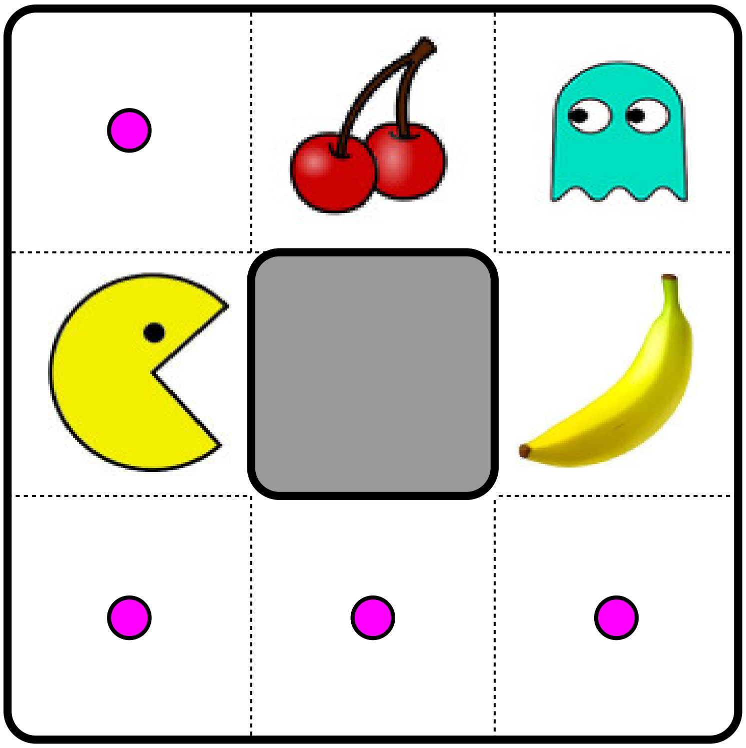
Stel dat Alice MKK kiest. Dan kiest Bob weer MMK. Laat zien dat in dit geval

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) \quad \geq \quad & \mathbb{P}(W_1 = M, W_2 = K, W_3 = M, W_4 = M) \\ & + \mathbb{P}(W_1 = M, W_2 = M) \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(W_1 = \cdots = W_k = K, W_{k+1} = M, W_{k+2} = M),\end{aligned}$$

en dus weer $\mathbb{P}(B) > \frac{1}{2}$.

Slotopmerking bij deze opgave: Als Alice KMK of KMM kiest dan kiest Bob KKM. Uit onderdeel (e) en symmetrieoverwegingen volgt dus ook weer dat Bob wint met kans $> \frac{1}{2}$.
We hebben dus gezien dat, welk patroon Alice ook kiest, Bob altijd een patroon kan kiezen zodat hij wint met kans $> \frac{1}{2}$. Het bestaan van zo een strategie wordt door velen als tegenintuïtief ervaren.

Opgave 3, (punten: a: 10, b: 10, c: 10)
Een verzamelaar koopt op een rommelmarkt een antieke spelcomputer met daarop het spel pacman. In de figuur hieronder is het eerste “level” van het spel afgebeeld. Het speelveld bestaat uit 8 vakjes (in het midden is een vakje waar Pacman niet op kan komen), er zijn vier pillen, een banaan, een kers en een spookje aanwezig.



Als Pacman op hetzelfde vakje als het spookje terecht komt dan is het spel voorbij (in deze – zeer oude – versie van het spel heeft hij slechts één leven). Het doel van het spel is de pillen, de banaan en de kers te bemachtigen zonder met het spookje in contact te komen. Omdat dit het eerste, zeer makkelijke level van het spel is, blijft het spookje constant op hetzelfde vakje staan.

De verzamelaar probeert het spel te spelen, maar jammergenoeg is er iets mis met de bedrading van de spelcomputer. Hierdoor gaat Pacman telkens naar een willekeurig gekozen vakje dat grenst aan het huidige vakje.

(a) We zijn in eerste instantie geïnteresseerd in de kans dat Pacman de banaan weet te bemachtigen zonder op het vakje van het spookje terecht te komen. Stel een stelsel vergelijkingen op dat deze kans bescrijft.

(b) Los dit stelsel op. Wat is de gevraagde kans?

(c) Wat is de kans dat Pacman eerst de banaan en dan de kers opeet, zonder ooit bij het spookje terecht te komen?