Uitwerkingen van het hertentamen

22 mei 2013

Opgave 1a

Aantal punten voor dit onderdeel: 6

Voor $a \geq 0$ hebben we

$$\begin{aligned}
F_X(a) &= \mathbb{P}(X \leq a) \\
&= c\int_0^a \int_0^\infty (x+2y)e^{-(x+y)}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= c\int_0^a \int_0^\infty xe^{-x} \cdot e^{-y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x + c\int_0^a \int_0^\infty e^{-x} \cdot 2ye^{-y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= c\int_0^a xe^{-x}\mathrm{d}x \cdot \int_0^\infty e^{-y}\mathrm{d}y + 2c\int_0^a e^{-x}\mathrm{d}x \cdot \int_0^\infty ye^{-y}\mathrm{d}y \\
&= c \cdot \Big[-xe^{-x} - e^{-x}\Big]_0^a \cdot \Big[-e^{-y}\Big]_0^\infty + 2c \cdot \Big[-e^{-x}\Big]_0^a \cdot \Big[-ye^{-y} - e^{-y}\Big]_0^\infty \\
&= c \cdot (1 - ae^{-a} - e^{-a}) \cdot 1 + 2c \cdot (1 - e^{-a}) \cdot 1 \\
&= c(3 - (3+a)e^{-a}).
\end{aligned}$$

Op dezelfde manier vinden we:

$$\begin{aligned}
F_Y(b) &= \mathbb{P}(Y \leq b) \\
&= c\int_0^\infty \int_0^b (x+2y)e^{-(x+y)}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= c\int_0^\infty \int_0^b xe^{-x} \cdot e^{-y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x + c\int_0^\infty \int_0^b e^{-x} \cdot 2ye^{-y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= c\int_0^\infty xe^{-x}\mathrm{d}x \cdot \int_0^b e^{-y}\mathrm{d}y + 2c\int_0^\infty e^{-x}\mathrm{d}x \cdot \int_0^b ye^{-y}\mathrm{d}y \\
&= c \cdot \Big[-xe^{-x} - e^{-x}\Big]_0^\infty \cdot \Big[-e^{-y}\Big]_0^b + 2c \cdot \Big[-e^{-x}\Big]_0^\infty \cdot \Big[-ye^{-y} - e^{-y}\Big]_0^b \\
&= c \cdot 1 \cdot (1 - e^{-b}) + 2c \cdot 1 \cdot (1 - be^{-b} - e^{-b}) \\
&= c(3 - (3+2b)e^{-b}).
\end{aligned}$$

Dat $F_X(a) = 0$ voor $a < 0$ en $F_Y(b) = 0$ voor $b < 0$ volgt direct uit de definitie van gemeenschappelijke dichtheid $f_{X,Y}$.

Opgave 1b

Aantal punten voor dit onderdeel: 6

Omdat F_X een cumulatieve verdelingsfunctie is, hebben we:

$$1 = \lim_{x\to\infty} F_X(x) = 3c.$$

Er moet dus gelden dat $c = \frac{1}{3}$.

Opgave 1c

Aantal punten voor dit onderdeel: 6

Als X, Y onafhankelijk zijn dan moet gelden dat

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y),$$

(pagina 124 van het boek). Voor $x > 0$ is de marginale kansdichtheid van X:

$$f_X(x) = F_X'(x) = c(3+x)e^{-x} - ce^{-x} = c(2+x)e^{-x}, \quad \text{(voor } x > 0\text{)},$$

en voor $y > 0$ is de marginale kansdichtheid van Y:

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = c(3+2y)e^{-y} - c2e^{-y} = c(1+2y)e^{-y}, \quad \text{(voor } y > 0\text{)}.$$

En dus is, voor $x, y > 0$:

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) = c^2(2+x)(1+2y)e^{-(x+y)}.$$

Als X, Y onafhankelijk zijn, dan moet dus gelden (voor alle $x, y > 0$):

$$c(x+2y)e^{-(x+y)} = c^2(2+x)(1+2y)e^{-(x+y)}.$$

Er moet dan gelden dat óf $c = 0$ óf $x + 2y = c(2+x)(1+2y)$ voor alle $x, y > 0$. Als we in dat laatste geval x, y beiden naar nul sturen zien we dat er moet gelden dat $2c = 0$ ofwel ook weer $c = 0$.

Als je onderdeel (b) correct hebt opgelost zie je dat dit niet klopt met het antwoord daar. Als je het niet had opgelost kun je opmerken dat $c = 0$ implicieert dat $f_{X,Y} \equiv 0$ (de functie die identiek nul is) en dat kan natuurlijk niet want de integraal van $f_{X,Y}$ moet gelijk aan 1 zijn.

X en Y zijn dus **afhankelijk**.

Opgave 1d

Aantal punten voor dit onderdeel: 6

Zoals we in de uitwerking van 1c hebben gezien is

$$f_X(x) = \begin{cases} c(2+x)e^{-x} & \text{als } x > 0, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

De verwachting van X is dus:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X &= \int_0^\infty x \cdot c(2+x)e^{-x} \mathrm{d}x \\ &= 2c \int_0^\infty xe^{-x} \mathrm{d}x + c \int_0^\infty x^2 e^{-x} \mathrm{d}x \\ &= 2c\Big[-xe^{-x} - e^{-x}\Big]_0^\infty + c\Big[-x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x}\Big]_0^\infty \\ &= 4c. \end{aligned}$$

(en dit is gelijk aan $4/3$.)

Op dezelfde wijze vinden we de verwachting van Y:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}Y &= \int_0^\infty y \cdot c(1+2y)e^{-y}\mathrm{d}y \\
&= c\int_0^\infty ye^{-y}\mathrm{d}x + 2c\int_0^\infty y^2e^{-y}\mathrm{d}x \\
&= c\Big[-ye^{-y}-e^{-y}\Big]_0^\infty + 2c\Big[-y^2e^{-y}-2ye^{-y}-2e^{-y}\Big]_0^\infty \\
&= 5c.
\end{aligned}
$$

(en dit is gelijk aan 5/3).

Opgave 1e

Aantal punten voor dit onderdeel: 6

We hebben

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y>X) &= \int_0^\infty\int_x^\infty c(x+2y)e^{-(x+y)}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= c\int_0^\infty\int_x^\infty xe^{-x}e^{-y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x + 2c\int_0^\infty\int_x^\infty e^{-x}ye^{-y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= c\int_0^\infty xe^{-x}\Big[-e^{-y}\Big]_x^\infty\mathrm{d}x + 2c\int_0^\infty e^{-x}\Big[-ye^{-y}-e^{-y}\Big]_x^\infty\mathrm{d}x \\
&= c\int_0^\infty xe^{-2x}\mathrm{d}x + 2c\int_0^\infty (x+1)e^{-2x}\mathrm{d}x \\
&= c\Big[-\frac{1}{2}xe^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}\Big]_0^\infty + 2c\Big[-\frac{1}{2}(x+1)e^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}\Big]_0^\infty \\
&= \frac{7}{4}\cdot c.
\end{aligned}
$$

(en dit is gelijk aan $\frac{7}{12}$.)

Opgave 2a

Aantal punten voor dit onderdeel: 6

- Als $W_1=K, W_2=K, W_3=M$ dan wint Alice.
- Als $W_1=K, W_2=M, W_3=M$ dan wint Bob.
- Als de eerste drie worpen x,y,z zijn met $(x,y,z)\neq(K,K,M),(K,M,M)$ dan komt KKM eerder voor dan MKK in het rijtje $W_1,W_2,W_3,W_4,\dots$ dan en slechts dan als KKM eerder voorkomt dan MKK in het rijte $W_2,W_3,W_4,\dots$. Dat tweede rijtje begint met y,z en daarna hebben we onafhankelijke worpen met een zuivere munt. Gegeven dat $W_1=x, W_2=y, W_3=z$ en $(x,y,z)\neq(K,K,M),(K,M,M)$ (en we nog geen informatie hebben over de vierde en latere worpen) is de kans dat Alice wint dus hetzelfde als de kans dat Alice wint gegeven dat de eerste worp y is en de tweede worp z (en we nog geen informatie hebben over de derde en latere worpen)

Opgave 2b

Aantal punten voor dit onderdeel: 6

Door te partitioneren op de waarde van W_3 vinden we

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A|W_1=K,W_2=K) &= \mathbb{P}(A,W_3=K|W_1=K,W_2=K) \\
&\quad +\mathbb{P}(A,W_3=M|W_1=K,W_2=K) \\
&= \mathbb{P}(A|W_1=K,W_2=K,W_3=K)\mathbb{P}(W_3=K|W_1=K,W_2=K) \\
&\quad +\mathbb{P}(A|W_1=K,W_2=K,W_3=M)\mathbb{P}(W_3=M|W_1=K,W_2=K) \\
&= \mathbb{P}(A|W_1=K,W_2=K)\cdot\tfrac{1}{2}+1\cdot\tfrac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

(de tweede regel volgt met de definitie van conditionele kans en de derde regel volgt uit 2a en het feit dat het onafhankelijke worpen met een zuivere munt betreft)

Op dezelfde manier hebben we

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A|W_1=K,W_2=M) &= \mathbb{P}(A,W_3=K|W_1=K,W_2=M) \\
&\quad +\mathbb{P}(A,W_3=M|W_1=K,W_2=M) \\
&= \mathbb{P}(A|W_1=K,W_2=M,W_3=K)\mathbb{P}(W_3=K|W_1=K,W_2=M) \\
&\quad +\mathbb{P}(A|W_1=K,W_2=M,W_3=M)\mathbb{P}(W_3=M|W_1=K,W_2=M) \\
&= \mathbb{P}(A|W_1=M,W_2=K)\cdot\tfrac{1}{2}+0\cdot\tfrac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

en

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A|W_1=M,W_2=K) &= \mathbb{P}(A,W_3=K|W_1=M,W_2=K) \\
&\quad +\mathbb{P}(A,W_3=M|W_1=M,W_2=K) \\
&= \mathbb{P}(A|W_1=M,W_2=K,W_3=K)\mathbb{P}(W_3=K|W_1=K,W_2=K) \\
&\quad +\mathbb{P}(A|W_1=M,W_2=K,W_3=M)\mathbb{P}(W_3=M|W_1=K,W_2=M) \\
&= \mathbb{P}(A|W_1=K,W_2=K)\cdot\tfrac{1}{2}+\mathbb{P}(A|W_1=K,W_2=M)\cdot\tfrac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

en

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A|W_1=M,W_2=M) &= \mathbb{P}(A,W_3=K|W_1=M,W_2=M) \\
&\quad +\mathbb{P}(A,W_3=M|W_1=M,W_2=M) \\
&= \mathbb{P}(A|W_1=M,W_2=M,W_3=K)\mathbb{P}(W_3=K|W_1=M,W_2=M) \\
&\quad +\mathbb{P}(A|W_1=M,W_2=M,W_3=M)\mathbb{P}(W_3=M|W_1=M,W_2=M) \\
&= \mathbb{P}(A|W_1=M,W_2=K)\cdot\tfrac{1}{2}+\mathbb{P}(A|W_1=M,W_2=M)\cdot\tfrac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Opgave 2c

Aantal punten voor dit onderdeel: 6

Om te beginnen lossen we het stelsel uit 2b op.
Uit de eerste vergelijking van 2b volgt:

$$\mathbb{P}(A|W_1=K,W_2=K)=1.$$

Uit de tweede vergelijking volgt:

$$\mathbb{P}(A|W_1=K,W_2=M)=\frac{1}{2}\mathbb{P}(A|W_1=M,W_2=K).$$

Invullen in de derde vergelijking geeft

$$\mathbb{P}(A|W_1=M,W_2=K)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\mathbb{P}(A|W_1=M,W_2=K).$$

Dit geeft:

$$\mathbb{P}(A|W_1 = M, W_2 = K) = \frac{2}{3}.$$

en dus ook $\mathbb{P}(A|W_1 = K, W_2 = M) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(A|W_1 = M, W_2 = K) = \frac{1}{3}$. Invullen in de vierde vergelijking uit 2b geeft

$$\mathbb{P}(A|W_1 = M, W_2 = M) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\mathbb{P}(A|W_1 = M, W_2 = M),$$

ofwel $\mathbb{P}(A|W_1 = M, W_2 = M) = \frac{2}{3}$.

We kunnen nu $\mathbb{P}(A)$ als volgt uitrekenen (p31 van het boek):

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A|W_1 = K, W_2 = K)\mathbb{P}(W_1 = K, W_2 = K) + \mathbb{P}(A|W_1 = K, W_2 = M)\mathbb{P}(W_1 = K, W_2 = M) \\
&\quad + \mathbb{P}(A|W_1 = M, W_2 = K)\mathbb{P}(W_1 = M, W_2 = K) + \mathbb{P}(A|W_1 = M, W_2 = M)\mathbb{P}(W_1 = M, W_2 = M) \\
&= \tfrac{1}{4}(1 + \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}) \\
&= \tfrac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Opgave 2d

Aantal punten voor dit onderdeel: 6

Als de eerste worp M is dan verschijnt het patroon van Bob zodra er een dubbel K voorkomt, en Alice heeft daarna nog een extra K of M nodig. Dus als M het eerste symbool is, dan wint Bob altijd, wat de latere worpen ook zijn. Als de eerste twee worpen K, M zijn dan wint Bob ook altijd. Er geldt dus:

$$\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(W_1 = M \text{ of } W_1 = K, W_2 = M) = \mathbb{P}(W_1 = M) + \mathbb{P}(W_1 = K, W_2 = M),$$

waarbij we gebruiken dat de gebeurtenissen $\{W_1 = M\}$ en $\{W_1 = K, W_2 = M\}$ disjunct zijn.

Er volgt $\mathbb{P}(B) \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} > \frac{1}{2}$.

Opgave 2e

Aantal punten voor dit onderdeel: 6

Stel eerst dat Alice MKM heeft gekozen. Als de eerste vijf worpen M, K, K, M, M zijn dan komt het patroon van Bob voor zodra de volgende K optreedt, terwijl Alice na die K nog een extra M nodig heeft. Als de eerste vijf worpen M, K, K, M, M zijn weten we dus al zeker dat Bob uiteindelijk zal winnen.

Om dezelfde reden: als de serie worpen begint met een willekeurig aantal Ks gevolgd door twee Ms dan wint Bob altijd, ongeacht wat de latere worpen ook zijn. Dus hebben we:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &\geq \mathbb{P}(\{W_1 = M, W_2 = K, W_3 = K, W_4 = M, W_5 = M\} \text{ of} \\
&\qquad \{W_1 = M, W_2 = M\} \text{ of } \{W_1 = K, W_2 = M, W_3 = M\} \text{ of } \ldots) \\
&= \mathbb{P}(W_1 = M, W_2 = K, W_3 = K, W_4 = M, W_5 = M) \\
&\quad + \mathbb{P}(W_1 = M, W_2 = M) \\
&\quad + \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(W_1 = \cdots = W_k = K, W_{k+1} = M, W_{k+2} = M) \\
&= \tfrac{1}{32} + \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-(k+2)} \\
&= \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{2} \\
&> \tfrac{1}{2}.
\end{aligned}$$

(De tweede regel volgt omdat het disjuncte eventualiteiten betreft.)

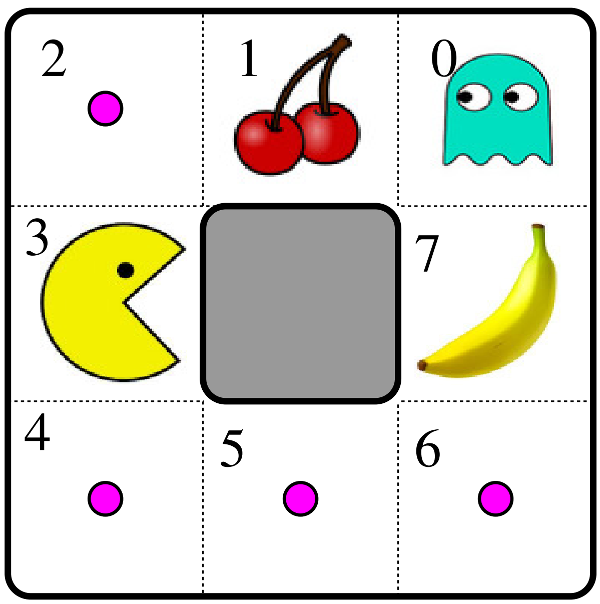
Als Alice MKK kiest dan wint Bob als de eerste vier worpen M, K, M, M zijn. Ook wint Bob weer als de rij wopen begint met een willekeurig aantal Ks gevolgd door twee Ms. We hebben dus:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &\geq \mathbb{P}(\{W_1 = M, W_2 = K, W_3 = M, W_4 = M\} \text{ of} \\
&\qquad \{W_1 = M, W_2 = M\} \text{ of } \{W_1 = K, W_2 = M, W_3 = M\} \text{ of } \dots) \\
&= \mathbb{P}(W_1 = M, W_2 = K, W_3 = M, W_4 = M) \\
&\quad + \mathbb{P}(W_1 = M, W_2 = M) \\
&\quad + \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(W_1 = \cdots = W_k = K, W_{k+1} = M, W_{k+2} = M) \\
&= \tfrac{1}{16} + \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-(k+2)} \\
&= \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{2} \\
&> \tfrac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Opgave 3a

Aantal punten voor dit onderdeel: 10

We nummeren de velden als volgt:



Het gezochte stelsel vergelijkingen is nu

$$\begin{aligned}
&p_0 = 0, \\
&p_7 = 1, \\
&p_i = \tfrac{1}{2}(p_{i-1} + p_{i+1}), \quad \text{(voor } 1 \leq i \leq 6\text{)}.
\end{aligned}$$

We zoeken p_3

Opgave 3b

Aantal punten voor dit onderdeel: 10

Dit stelsel kun je herkennen als de gambler's ruin uit de handout met $p = \frac{1}{2}$ en $N = 7$. Een manier om het stelsel op te lossen kun je daar lezen. (je mocht het op de manier uit de handout oplossen, maar er zijn ook andere manieren en die mochten zeker ook.) De oplossing wordt gegeven door $p_i = i/7$ voor alle i en de gezochte kans is dus $3/7$.

Opgave 3c

Aantal punten voor dit onderdeel: 10

We definiëren:

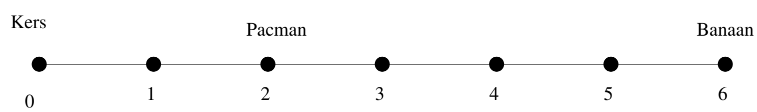
$$A := \{\text{Pacman eet eerst de banaan, dan de kers zonder bij het spook te komen}\}.$$

$$B := \{\text{Pacman eet de banaan zonder bij de kers of het spook te komen}\}$$

Omdat $A \subseteq B$, kunnen we de kans op A uitrekenen middels:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Om de kans op B te berekenen merken we op dat dit overéénkomt met een standaard gambler's ruin met $p = \frac{1}{2}, N = 6$ waarbij de kers met "bankroet" correspondeert, de banaan met een vermogen van 6 euro en Pacman begint met een vermogen van 2 euro.

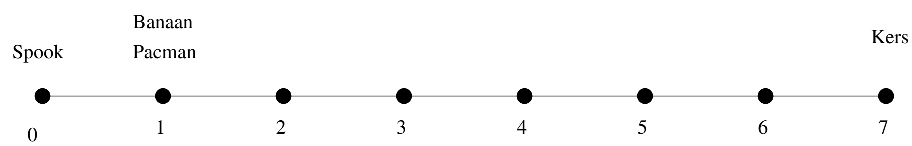


Er volgt dus dat

$$\mathbb{P}(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

(Dit kon je afleiden op de gebruikelijke wijze, maar verwijzen naar de handout mocht ook.)

Om de kans op A *gegeven* B uit te rekenen merken we op dat het gedrag van Pacman nadat hij de banaan heeft bereikt, gewoon weer een (symmetrische) toevallige wandeling is, nu startend op het vakje van de banaan. De kans op A *gegeven* B is daarom precies de kans dat een (symmetrische) toevallige wandeling, startend op het vakje van de banaan, de kers bereikt zonder het vakje met het spook te bezoeken. Met andere woorden, $\mathbb{P}(A|B)$ is weer een gamblers ruin met $p = \frac{1}{2}$ maar nu met $N = 7$, waarbij het spook bankroet voorstelt, de kers een vermogen van 7 euro en Pacman begint met een startkapitaal van 1 euro.



Er volgt

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{1}{7}.$$

En dus is

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{21}.$$