Deeltentamen Inleiding Kansrekening en Statistiek

22 mei 2014

- Elke opgave dient **op een apart blad** ingeleverd te worden.
- Zet **op elk blad** je naam en studentnummer.
- Het gebruik van rekenmachines, het boek, aantekeningen of andere hulpmiddelen is absoluut niet toegestaan. Ook is het absoluut niet toegstaan een telefoon oid. op je tafel te hebben.
- Geef telkens een beknopt bewijs van je antwoord of een berekening/toelichting, tenzij duidelijk in de opgave staat aangegeven dat dit niet hoeft.
- **NOTA BENE:** het gebruiken van aparte bladen voor elke opgave met daarop telkens je naam en studentnummer is 10 van de 100 punten waard.

Opgave 1. (20pt)
Een dame die haar thee altijd met melk drinkt beweert dat zij kan proeven of eerst de thee in haar kopje is geschonken en dan de melk of andersom. Om haar bewering te toetsen, wordt het volgende experiment uitgevoerd. Buiten haar zicht zullen 8 kopjes thee met melk worden ingeschonken, 4 met de melk eerst en 4 met de thee eerst. De kopjes worden vervolgens één-voor-één, in een volkomen toevallige volgorde, aan haar gegeven. Ervan uitgaande dat ze het verschil helemaal niet kan proeven en gewoon gokt, wat is de kans dat ze het bij elk kopje goed heeft?
(Nota bene: haar wordt verteld dat er precies 4 kopjes van elke soort zullen zijn, in een willekeurige volgorde)

Opgave 2. (20pt) In een hotel zijn drie kamers, 1, 2 en 3, elk met twee nachtkastjes. In kamer 1 zit in elk nachtkastje een laptop, in beide nachtkastjes van kamer 2 zit een iPhone en in kamer 3 zit in de ene lade een laptop en in de andere een iPhone.

Een dief kiest per toeval een kamer en een nachtkastje in die kamer, en opent deze. Als de inhoud van het nachtkastje een laptop blijkt te zijn, wat is dan de kans dat het andere nachtkastje in dezelfde kamer ook een laptop bevat?

Z.O.Z.

Opgave 3. (a: 10pt, b: 10pt) De toevalsvariabele X heeft een Poisson verdeling met parameter $\mu > 0$. Laat zien dat

(a) $\mathbb{E}[X(X-1)\dots(X-k+1)] = \mu^k$ voor alle $k \in \mathbb{N}$;

(b) $\mathrm{Var}(X) = \mu$.

Opgave 4. (a: 15 pt, b: 15 pt)
Laat $X_1, \dots, X_n$ onafhankelijke stochasten zijn, met X_i geometrisch verdeeld met parameter $p_i \in (0,1)$. Definieer $U := \min(X_1, \dots, X_n)$.

(a) Laat zien dat U ook geometrisch verdeeld is, met parameter $p^* = 1 - (1-p_1)\dots(1-p_n)$.
Hint 1: Het volstaat hier om te laten zien dat $\mathbb{P}(U = k)$ de juiste vorm heeft voor alle $k \in \mathbb{N}$.
Hint 2: Je mag zonder bewijs gebruiken dat als $X_1, \dots, X_n$ onafhankelijk zijn dan
$\mathbb{P}(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = \mathbb{P}(X_1 \in A_1)\dots\mathbb{P}(X_n \in A_n)$ voor alle $A_1, \dots, A_n$.

(b) Laat zien dat

$$\mathbb{P}(U = X_i) = \frac{\mathbb{E}U}{\mathbb{E}X_i},$$

voor alle $1 \le i \le n$.
(*Hint:* gebruik dat $\mathbb{P}(U = X_i) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_i = k \text{ en } X_j \ge k \text{ voor alle } j \neq i)$.)