Uitwerkingen van het deeltentamen

May 20, 2014

Opgave 1

De dame moet een rijtje van de vorm (M, T, T, M, T, M, T, M) gokken, met 8 symbolen waarvan precies 4 symbolen M (voor melk eerst) en 4 symbolen T (voor thee eerst). Er zijn in total $\binom{8}{4} = 70$ zulke rijtjes, dus de gezochte kans is gelijk aan $1/70$.

Opgave 2

Het is handig om te werken met uitkomsten ruimte $\Omega = \{(L, L), (I, I), (L, I), (I, L)\}$. Hierbij staat L voor laptop en I voor iPhone en stelt de eerste coordinaat de inhoud van het nachtkastje voor dat de dief opent en de tweede coordinaat de inhoud van het andere nachtkastje. $\mathbb{P}((L, L)) = \mathbb{P}((I, I)) = \frac{1}{3}$ (want dit is respectievelijk de kans dat de dief kamer 1 resp. kamer 2 binnengaat) en $\mathbb{P}((L, I)) = \mathbb{P}((I, L)) = \frac{1}{6}$ (want de dief moet kamer 3 binnengaan alwaar hij elk nachtkastje met gelijke kans opent). We zijn geïnteresseerd in de conditionele kans $P(A|B)$ waarbij $A = \{(L, L)\}$ en $B = \{(L, L), (L, I)\}$. We zien dat

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = \frac{2}{3}.$$

Opgave 3a

We hebben

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X(X-1)\dots(X-k+1)\right] &= \textstyle\sum_{\ell=0}^{\infty} \ell(\ell-1)\dots(\ell-k+1)\mathbb{P}(X=\ell) \\
&= \textstyle\sum_{\ell=k}^{\infty} \ell(\ell-1)\dots(\ell-k+1)\mathbb{P}(X=\ell) \\
&= \textstyle\sum_{\ell=k}^{\infty} \ell(\ell-1)\dots(\ell-k+1)\frac{\mu^\ell}{\ell!}e^{-\mu} \\
&= \mu^k \cdot \textstyle\sum_{\ell=k}^{\infty} \frac{\mu^{\ell-k}}{(\ell-k)!}e^{-\mu} \\
&= \mu^k \cdot \textstyle\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\mu^x}{x!}e^{-\mu} \\
&= \mu^k \cdot 1 \\
&= \mu^k
\end{aligned}$$

In de tweede regel hebben we gebruikt dat $\ell(\ell-1)\dots(\ell-k+1) = 0$ voor $\ell = 0, \dots, k-1$. In de vierde regel hebben we de substitutie $x = \ell - k$ uitgevoerd. De vijfde regel volgt omdat we weten dat de som van de kansen $\sum_{\ell=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = \ell) = 1$ voor een Poisson variabele.

Opgave 3b

Gebruikmakend van het vorige onderdeel, hebben we

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}X(X-1) + \mathbb{E}X - (\mathbb{E}X)^2 = \mu^2 + \mu - \mu^2 = \mu.$$

Opgave 4a

Merk op dat, voor alle $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(U > k) &= \mathbb{P}(X_1 > k, \ldots, X_n > k) \\
&= \mathbb{P}(X_1 > k) \ldots \mathbb{P}(X_n > k) \\
&= (1 - p_1)^k \ldots (1 - p_n)^k \\
&= ((1 - p_1) \ldots (1 - p_n))^k \\
&= (1 - p^*)^k.
\end{aligned}$$

Hier hebben we de onafhankelijkheid van $X_1, \ldots, X_n$ gebruikt in de 2e regel. Er volgt, voor alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(U = k) &= \mathbb{P}(U > k - 1) - \mathbb{P}(U > k) \\
&= (1 - p^*)^{k-1} - (1 - p^*)^k \\
&= (1 - p^*)^{k-1} p^*.
\end{aligned}$$

Dus $\mathbb{P}(U = k)$ heeft inderdaad de gewenste vorm.

Opgave 4b

We hebben, gebruikmakend van de hint:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(U = X_i) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_i = k \text{ en } X_j \geq k \text{ for alle } j \neq i) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (1 - p_i)^{k-1} p_i \prod_{j \neq i} (1 - p_j)^{k-1} \\
&= p_i \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{n} (1 - p_j)^{k-1} \\
&= p_i \sum_{k=1}^{\infty} (1 - p^*)^{k-1} \\
&= \frac{p_i}{p^*} \sum_{k=1}^{\infty} (1 - p^*)^{k-1} p^* \\
&= \frac{p_i}{p^*}.
\end{aligned}$$

In de laatste regel hebben we gebruikt dat $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - p^*)^{k-1} p^* = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(U = k) = 1$. Aangezien $\mathbb{E}X_i = 1/p_i$ en $\mathbb{E}U = 1/p^*$ geldt $\frac{p_i}{p^*} = \mathbb{E}U / \mathbb{E}X_i$.