Uitwerkingen van het tentamen van 4 juli 2014

July 3, 2014

Opgave 1a

Er moet gelden dat $\sum_x \sum_y \mathbb{P}(X = x, Y = y) = 1$. Omdat er precies $\frac{n(n+1)}{2}$ paren (x, y) zijn waarvoor de kans $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$ gelijk is aan $\frac{c}{n(n+1)}$ en de kans nul is voor alle andere paren, volgt $c = 2$.

Opgave 1b

We hebben

$$\mathbb{P}(X = k) = \sum_y \mathbb{P}(X = k, Y = y) = \sum_{1 \leq y \leq k} \frac{c}{n(n+1)} = \frac{2k}{n(n+1)}.$$

Op dezelfde manier:

$$\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k \leq x \leq n} \frac{c}{n(n+1)} = \frac{2(n-k+1)}{n(n+1)}.$$

Opgave 1c

X en Y zijn *afhankelijk*, want $0 = \mathbb{P}(X = 1, Y = 2) \neq \mathbb{P}(X = 1) \cdot \mathbb{P}(Y = 2)$.

Opgave 1d

We hebben (voor $x \in \{1, \ldots, n\}$):

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) \\ &= \textstyle\sum_{1 \leq k \leq x} \frac{2k}{n(n+1)} \\ &= \frac{x(x+1)}{n(n+1)}. \end{aligned}$$

En dus hebben we voor algemene $x \in \mathbb{R}$:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x < 1, \\ \frac{\lfloor x \rfloor (\lfloor x \rfloor + 1)}{n(n+1)} & \text{als } 1 \leq x \leq n, \\ 1 & \text{als } x > n. \end{cases}$$

(Te herinnering: de notatie $\lfloor . \rfloor$ betekent “naar beneden afronden”.)

Opgave 1e

We hebben

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \mathbb{P}(X = k) = \frac{2}{n(n+1)} \cdot (\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n) = \frac{2n^2 + 3n + 1}{3n + 3}.$$

Opgave 2a

$\overline{X}$ is een zuivere schatter van p. Voor het bewijs, zie bijvoorbeeld Dekking, pagina 182.

Opgave 2b

$T = \left(\frac{1}{2}(X_1 + X_2)\right)^2$ is geen zuivere schatter van p^2, want:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}T &= \tfrac{1}{4}\mathbb{E}(X_1 + X_2)^2 \\
&= \tfrac{1}{4}\mathbb{E}(X_1^2 + X_2^2 + 2X_1X_2) \\
&= \tfrac{1}{4}\mathbb{E}X_1^2 + \tfrac{1}{4}\mathbb{E}X_2^2 + \tfrac{1}{2}\mathbb{E}X_1X_2 \\
&= \tfrac{1}{4}\mathbb{E}X_1 + \tfrac{1}{4}\mathbb{E}X_2 + \tfrac{1}{2}\mathbb{E}X_1\mathbb{E}X_2 \\
&= \tfrac{1}{4}p + \tfrac{1}{4}\mathbb{E}p + \tfrac{1}{2}p^2 \\
&= \tfrac{1}{2}(p + p^2).
\end{aligned}$$

(En dit is niet gelijk aan p^2 voor alle $0 < p < 1$.) In de vierde regel hebben we gebruikt dat X_1, X_2 waarden in $\{0, 1\}$ aannemen en onafhankelijk zijn.

Opgave 2c

Wegens de centrale limiet stelling geldt

$$\mathbb{P}\left(-z_{\alpha/2} < \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{X} - p}{\sqrt{p(1-p)}} < z_{\alpha/2}\right) \approx 1 - \alpha.$$

Merk nu op dat

$$\sqrt{n} \cdot \frac{\overline{X} - p}{\sqrt{p(1-p)}} \in (-z_{\alpha/2}, z_{\alpha/2}) \Leftrightarrow |\overline{X} - p| < z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \Leftrightarrow (\overline{X} - p)^2 < z_{\alpha/2}^2 \frac{p(1-p)}{n}$$

Haakjes uitwerken geeft:

$$p^2 - 2p\overline{X} + (\overline{X})^2 < \frac{z_{\alpha/2}^2}{n} \cdot p - \frac{z_{\alpha/2}^2}{n} \cdot p^2,$$

oftewel

$$\left(1 + \frac{z_{\alpha/2}^2}{n}\right) \cdot p^2 - \left(2\overline{X} + \frac{z_{\alpha/2}^2}{n}\right) \cdot p + (\overline{X})^2 < 0.$$

Met behulp van de abc-formule vinden we dat dit geldt d.e.s.d.a.:

$$p \in \left(\frac{(2\overline{X} + \frac{z_{\alpha/2}^2}{n}) - \sqrt{(2\overline{X} + \frac{z_{\alpha/2}^2}{n})^2 - 4(1 + \frac{z_{\alpha/2}^2}{n})(\overline{X})^2}}{2(1 + \frac{z_{\alpha/2}^2}{n})}, \frac{(2\overline{X} + \frac{z_{\alpha/2}^2}{n}) + \sqrt{(2\overline{X} + \frac{z_{\alpha/2}^2}{n})^2 - 4(1 + \frac{z_{\alpha/2}^2}{n})(\overline{X})^2}}{2(1 + \frac{z_{\alpha/2}^2}{n})} \right).$$

De discriminant kan nog herschreven worden als

$$\begin{aligned}(2\overline{X} + \frac{z^2_{\alpha/2}}{n})^2 - 4(1 + \frac{z^2_{\alpha/2}}{n})(\overline{X})^2 &= 4(\overline{X})^2 + 4\overline{X}\frac{z^2_{\alpha/2}}{n} + \frac{z^4_{\alpha/2}}{n^2} - 4(\overline{X})^2 - 4\frac{z^2_{\alpha/2}}{n}(\overline{X})^2 \\ &= z^2_{\alpha/2} \cdot \left(\frac{4\overline{X}(1-\overline{X})}{n} + \frac{z^2_{\alpha/2}}{n^2} \right).\end{aligned}$$

Dit geeft het gewenste interval.

Opgave 2d

Verwerp H_0 als $\overline{X} > \frac{1}{2} + \frac{z_\alpha}{2\sqrt{n}}$.

Opgave 3a

We kunnen het proces ook beschrijven als een dronken wandelaar, die begint op 4m rechts van zijn huis. Hier staat de afstand van de wandelaar tot zijn huis voor de afstand tussen de muizen. Elke seconde stapt hij met kans $(1-a)b$ twee meter naar rechts (als de mannetjesmuis naar links en de vrouwtjesmuis naar rechts gaat); met kans $(1-a)(1-b)+ab$ blijft hij staan (allebei de muizen gaan naar links of allebei de muizen gaan naar rechts); met kans $a(1-b)$ stapt hij twee meter naar links (de mannetjesmuis stapt naar rechts, de vrouwtjesmuis naar links). Merk op dat E_{2N} de eventualiteit is dat de dronkeman thuiskomt voor dat hij positie $2N$ bereikt. Merk ook op dat als de dronkeman op een oneven afstand van zijn huis staat, hij nooit thuis zal komen. Dus inderdaad $d_i = 0$ voor alle oneven i en dat $d_0 = 1$ en $d_{2N} = 0$ mag ook duidelijk zijn. Laat L de eventualiteit zijn dat de eerste stap van de dronkelap naar links is, R dat de eerste stap naar rechts is en R dat hij blijft staan. Als de dronkeman op afstand i staat bij aanvang en hij naar links stapt, dan is de situatie na die stap net als bij het begin van de wandeling wanneer die op $i-2$ aanvangt. Idem voor rechts en blijven staan. In termen van conditionele kansen hebben we dus:

$$\mathbb{P}_i(E_{2N}|L) = \mathbb{P}_{i-2}(E_{2N}), \quad \mathbb{P}_i(E_{2N}|S) = \mathbb{P}_i(E_{2N}), \quad \mathbb{P}_i(E_{2N}|R) = \mathbb{P}_{i+2}(E_{2N}).$$

Met behulp van de wet van de totale kans hebben we, voor even i:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_i(E_{2N}) &= \mathbb{P}_{i-2}(E_{2N}|L)\mathbb{P}(L) + \mathbb{P}_i(E_{2N}|S)\mathbb{P}(S) + \mathbb{P}_i(E_{2N}|R)\mathbb{P}(R) \\ &= \mathbb{P}_{i-2}(E_{2N}|L) \cdot a(1-b) + \mathbb{P}_i(E_{2N}|S) \cdot ((1-a)(1-b)+ab) + \mathbb{P}_i(E_{2N}|R) \cdot (1-a)b.\end{aligned}$$

In andere woorden, inderdaad:

$$d_i = a(1-b) \cdot d_{i-2} + ((1-a)(1-b)+ab) \cdot d_i + (1-a)b \cdot d_{i+2} \qquad \text{voor } i = 2, 4, \ldots, 2(N-1), \tag{1}$$

Opgave 3b

Merk op dat (1) herschreven kan worden tot:

$$d_i = \frac{a(1-b)}{a(1-b)+(1-a)b} \cdot d_{i-2} + \frac{(1-a)b}{a(1-b)+(1-a)b} \cdot d_{i+2} \qquad \text{voor } i = 2, 4, \ldots, 2(N-1).$$

Als we nu zetten $p := \frac{a(1-b)}{a(1-b)+(1-a)b}$ en $p_j := d_{2N-2j}$ voor $j = 0, \ldots, N$, dan krijgen we inderdaad het stelsel uit de opgave.

Opgave 3c

Als $a = b$ dan is $p = 1/2$ en weten we uit de handout dat $p_j = j/N$. Dit geeft

$$d_i = p_{N-i/2} = \frac{N - i/2}{N} \quad \text{voor } i \text{ even.}$$

Op een andere manier dit antwoord afleiden mocht natuurlijk ook, mits die manier correct is.

Opgave 3d

We nemen p en p_j als onderdeel 4b. Als $a \neq b$ dan is $p \neq 1/2$. Dus weten we uit de handout dat

$$p_j = \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^i}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^N} = \frac{1 - \left(\frac{(1-a)b}{a(1-b)}\right)^i}{1 - \left(\frac{(1-a)b}{a(1-b)}\right)^N}.$$

In andere woorden:

$$d_i = p_{N-i/2} = \frac{1 - \left(\frac{(1-a)b}{a(1-b)}\right)^{N-i/2}}{1 - \left(\frac{(1-a)b}{a(1-b)}\right)^N}.$$

Op een andere manier dit antwoord afleiden mocht natuurlijk ook, mits die manier correct is.

Opgave 3e

Met de hint en "continuiteit van de kans" hebben we

$$\mathbb{P}(\text{de muizen komen ooit in dezelfde kamer}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{N>2} E_{2N}\right) = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(E_{2N}).$$

Met behuld van onderdeel c zien we dat als $a = b$ dan

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(E_{2N}) = \lim_{N\to\infty} \frac{N - 4/2}{N} = 1.$$

Als $a > b$ dan is $\frac{(1-a)b}{a(1-b)} < 1$ en dus is

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(E_{2N}) = \lim_{N\to\infty} \frac{1 - \left(\frac{(1-a)b}{a(1-b)}\right)^{N-4/2}}{1 - \left(\frac{(1-a)b}{a(1-b)}\right)^N} = 1.$$

Als $a < b$ dan is daarentegen $\frac{(1-a)b}{a(1-b)} > 1$ en dus is

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(E_{2N}) &= \lim_{N\to\infty} \frac{1-\left(\frac{(1-a)b}{a(1-b)}\right)^{N-4/2}}{1-\left(\frac{(1-a)b}{a(1-b)}\right)^N} = \lim_{N\to\infty} \frac{\left(\frac{(1-a)b}{a(1-b)}\right)^{N-2}}{\left(\frac{(1-a)b}{a(1-b)}\right)^N} \cdot \frac{1-1/\left(\frac{(1-a)b}{a(1-b)}\right)^{N-4/2}}{1-1/\left(\frac{(1-a)b}{a(1-b)}\right)^N} \\ &= \left(\frac{(1-a)b}{a(1-b)}\right)^{-2} = \left(\frac{a(1-b)}{(1-a)b}\right)^2. \end{aligned}$$