Uitwerkingen van het hertentamen van 21 augustus 2014

Opgave 1a

Er moet gelden dat $1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$. Ofwel:

$$\begin{aligned} 1 &= c \cdot \int_0^1 \int_{1-x}^1 x\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= c \cdot \int_0^1 x \cdot (1-(1-x))\mathrm{d}x \\ &= c \cdot \int_0^1 x^2 \mathrm{d}x \\ &= c/3. \end{aligned}$$

Er volgt $c = 3$.

Opgave 1b

Voor $0 < x < 1$ hebben we:

$$F_X(x) = \int_0^x \int_{1-t}^1 ct\mathrm{d}y\mathrm{d}t = c\int_0^x t^2\mathrm{d}t = c\left(\frac{x^3}{3}\right).$$

Voor $x < 0$ is $F_X(x) = 0$ en voor $x > 1$ is $F_X(x) = 1$.

Opgave 1c

X en Y zijn *afhankelijk*, want $0 = \mathbb{P}(X < 1/2, Y < 1/2)$, terwijl $\mathbb{P}(X < 1/2) = \int_0^{1/2} \int_{1-x}^1 cx\mathrm{d}y\mathrm{d}x > 0$ en $\mathbb{P}(Y < 1/2) = \int_0^{1/2} \int_{1-y}^1 cx\mathrm{d}x\mathrm{d}y > 0$.

Opgave 1d

Uit de hint zien we dat

$$\cos(Z) = \frac{X^2 + (2-X-Y)^2 - Y^2}{2X \cdot (2-X-Y)} = \frac{4 + 2X^2 - 4X - 2(2-X)Y}{2X(2-X-Y)}.$$

Merk op dat de noemer altijd positief is omdat $X > 0$ en $X + Y < 2$. Dus de hoek Z is meer dan 90 graden d.e.s.d.a. $\cos(Z) < 0$ d.e.s.d.a.

$$4 + 2X^2 - 4X - 2(2-X)Y < 0.$$

oftewel

$$Y > \frac{2 + X^2 - 2X}{2-X} = 1 - \frac{X - X^2}{2-X}.$$

Merk op dat voor alle $0 < x < 1$ geldt dat $1 - x < 1 - \frac{x-x^2}{2-x}$. Er volgt dus

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(\cos(Z)<0) &= \int_0^1 \int_{1-\frac{x-x^2}{2-x}}^1 f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= c\int_0^1 \int_{1-\frac{x-x^2}{2-x}}^1 x\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= c\int_0^1 \left(1-(1-\tfrac{x-x^2}{2-x})\right) x\mathrm{d}x \\
&= c\int_0^1 \tfrac{x^2-x^3}{2-x}\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Opgave 1e

Middels de substitutie $y = 2 - x$ vinden we

$$\int_0^1 \frac{x^2-x^3}{2-x}\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{(2-y)^2-(2-y)^3}{y}\mathrm{d}y.$$

Mbv. haakjes uitwerken of het binomium v. Newton zien we dat dit gelijk is aan:

$$\int_1^2 \frac{4-4y+y^2-(8-12y+6y^2-y^3)}{y}\mathrm{d}y = \int_1^2 \frac{-4+8y-5y^2+y^3}{y}\mathrm{d}y = \int_1^2 \frac{-4}{y}+8-5y+y^2\mathrm{d}y.$$

Integreren geeft:

$$
\begin{aligned}
\left[-4\ln(y)+8y-\tfrac{5}{2}y^2+\tfrac{1}{3}y^3\right]_1^2 &= -4(\ln(2)-\ln(1))+8(2-1)-\tfrac{5}{2}(4-1)+\tfrac{1}{3}(8-1) \\
&= -4\ln(2)+\tfrac{17}{6}.
\end{aligned}
$$

Opgave 2a

Voor $t > 0$ hebben we $\mathbb{P}(Y_1 \le t) = \mathbb{P}(aX_1 \le t) = \mathbb{P}(X_1 \le t/a) = 1 - e^{-(\lambda/a)t}$.

Opgave 2b

We hebben

$$\mathbb{P}(T > t) = \mathbb{P}(X_1 > t)\ldots\mathbb{P}(X_n > t) = \left(e^{-\lambda t}\right)^n = e^{-(\lambda n)t}.$$

Dus ook weer $\mathbb{P}(T \le t) = 1 - e^{-(\lambda n)t}$.

Opgave 2c

Merk op dat, aangezien $T, \lambda > 0$:

$$\lambda \in \left(-\frac{\ln(1-\alpha/2)}{Tn}, -\frac{\ln(\alpha/2)}{Tn}\right) \Leftrightarrow T \in \left(-\frac{\ln(1-\alpha/2)}{\lambda n}, -\frac{\ln(\alpha/2)}{\lambda n}\right)$$

Met het vorige onderdeel zien we dat

$$\mathbb{P}\left(T \le -\frac{\ln(1-\alpha/2)}{\lambda n}\right) = 1 - \exp\left[+(\lambda n)\cdot\frac{\ln(1-\alpha/2)}{\lambda n}\right] = 1-(1-\alpha/2) = \alpha/2.$$

Op dezelfde wijze is

$$\mathbb{P}\left(T \ge -\frac{\ln(\alpha/2)}{\lambda n}\right) = \exp\left[+(\lambda n)\cdot\frac{\ln(\alpha/2)}{\lambda n}\right] = \alpha/2.$$

Dus inderdaad is

$$\mathbb{P}\left(\lambda \in \left(-\frac{\ln(1-\alpha/2)}{Tn}, -\frac{\ln(\alpha/2)}{Tn}\right)\right) = \mathbb{P}\left(T \in \left(-\frac{\ln(1-\alpha/2)}{\lambda n}, -\frac{\ln(\alpha/2)}{\lambda n}\right)\right) = 1-\alpha.$$

Opgave 2d

Basisstap: voor $n = 1$ staat hier gewoon de kansdichtheid v/e exponentiële stochast.
Inductiestap: Stel dat (voor $n > 1$) de dichtheid van $Z' := X_1 + \cdots + X_{n-1}$ gegeven wordt door $f_{Z'}(x) = (\lambda^{n-1}x^{n-2}e^{-\lambda x})/(n-2)!$ (voor $x > 0$ en $f_{Z'}(x) = 0$ anders). Omdat $Z = Z' + X_n$, en Z' en X_n onafhankelijk zijn, kunnen we de convolutieformule toepassen:

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &:= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} f_{Z'}(x) f_{X_n}(z-x)\mathrm{d}x \\
&= \textstyle\int_0^z \frac{\lambda^{n-1}x^{n-2}e^{-\lambda x}}{(n-2)!} \cdot \lambda e^{-\lambda(z-x)}\mathrm{d}x \\
&= \textstyle\int_0^z \frac{\lambda^n x^{n-2}e^{-\lambda z}}{(n-2)!}\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{\lambda^n x^{n-1}e^{-\lambda z}}{(n-1)!}\right]_0^z \\
&= \frac{\lambda^n z^{n-1}e^{-\lambda z}}{(n-1)!}
\end{aligned}$$

Opgave 2e

De verwachting van een exponentiële stochast met parameter μ is $\frac{1}{\mu}$ en de variantie is $\frac{1}{\mu^2}$. (Zie Durrett, p. 165.) Dus is

$$\mathbb{E}T = \frac{1}{n\lambda}, \mathrm{Var}(T) = \frac{1}{n^2\lambda^2}.$$

Mbv. "lineariteit v/d verwachting" is

$$\mathbb{E}Z = \mathbb{E}X_1 + \cdots + \mathbb{E}X_n = \frac{n}{\lambda}.$$

Omdat $X_1, \ldots, X_n$ onafhankelijk zijn hebben we

$$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}(Z_1) + \cdots + \mathrm{Var}(Z_n) = \frac{n}{\lambda^2}.$$

Opgave 3a

De kans dat $X = 1$ is de kans dat geen match optreedt bij de twee onschuldigen, dus $\mathbb{P}(X = 1) = (1/2) \cdot (1/2) = 1/4$. De kans dat $X = 2$ is de kans dat er een math optreedt bij precies één van de onschuldigen. Dus $\mathbb{P}(X = 2) = 2 \cdot (1/2) \cdot (1/2) = 1/2$. De kans dat $X = 3$ is de kans dat bij beide onschuldigen een match optreedt, dus $\mathbb{P}(X = 3) = 1/4$. Voor alle $k \notin \{1, 2, 3\}$ is $\mathbb{P}(X = k) = 0$.

Opgave 3b

De kans dat A de dader is (en dan zal hij ook meteen matchen) is gelijk aan $1/3$. We hebben verder:

$$\mathbb{P}(A \text{ matcht}) = \mathbb{P}(A \text{ is dader}) + \mathbb{P}(A \text{ is geen dader en matcht "per toeval"}) = 1/3 + (2/3) \cdot (1/2) = 2/3.$$

Er volgt:

$$\mathbb{P}(A \text{ is dader} | A \text{ matcht}) = \frac{1/3}{2/3} = 1/2.$$

Opgave 3c

We hebben:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A, B \text{ matchen beide}) &= \mathbb{P}(A \text{ is dader, } B \text{ matcht}) \\
&\quad +\mathbb{P}(B \text{ is dader, } A \text{ matcht}) \\
&\quad +\mathbb{P}(C \text{ is dader, } A, B \text{ matchen beide}) \\
&= (1/3) \cdot (1/2) + (1/3) \cdot (1/2) + (1/3) \cdot (1/2) \cdot (1/2) \\
&= 5/12.
\end{aligned}$$

Er volgt:

$$\mathbb{P}(A \text{ is dader} | A, B \text{ matchen beide}) = \frac{\mathbb{P}(A \text{ is dader, } B \text{ matcht})}{\mathbb{P}(A, B \text{ matchen beide})} = \frac{(1/3) \cdot (1/2)}{5/12} = 2/5.$$

Opgave 3d

Nu hebben we

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \text{ is dader, tenminste één van } B, C \text{ matcht}) &= \mathbb{P}(A \text{ is dader, } B \text{ matcht, } C \text{ niet}) \\
&\quad +\mathbb{P}(A \text{ is dader, } C \text{ matcht, } B \text{ niet}) \\
&\quad +\mathbb{P}(A \text{ is dader, } B, C \text{ matchen beide}) \\
&= (1/3) \cdot (1/2) \cdot (1/2) + (1/3) \cdot (1/2) \cdot (1/2) + (1/3) \cdot (1/2) \cdot (1/2) \\
&= 1/4.
\end{aligned}$$

Verder hebben we:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \text{ matcht, en tenminste één van } B, C \text{ matcht}) &= \mathbb{P}(A \text{ is dader, tenminste één van } B, C \text{ matcht}) \\
&\quad +\mathbb{P}(B \text{ is dader, } A \text{ matcht}) \\
&\quad +\mathbb{P}(C \text{ is dader, } A \text{ matcht}) \\
&= 1/4 + (1/3) \cdot (1/2) + (1/3) \cdot (1/2) \\
&= 7/12.
\end{aligned}$$

Er geldt dus

$$\begin{gathered}
\mathbb{P}(A \text{ is dader} | A \text{ matcht, en tenminste één van } B, C \text{ matcht}) \\
\| \\
\frac{\mathbb{P}(A \text{ is dader, tenminste één van } B, C \text{ matcht})}{\mathbb{P}(A \text{ matcht, en tenminste één van } B, C \text{ matcht})} \\
\| \\
\frac{1/4}{7/12} \\
\| \\
3/7.
\end{gathered}$$