Hertentamen Inleiding Kansrekening en Statistiek

21 juli 2015

- Elke opgave dient **op een apart blad** ingeleverd te worden.
- Zet **op elk blad** je naam en studentnummer.
- Het gebruik van rekenmachines, het boek, aantekeningen of andere hulpmiddelen is absoluut niet toegestaan. Het is i.h.b. ook absoluut niet toegestaan een telefoon o.i.d. op tafel te hebben.
- Geef telkens een beknopt bewijs van je antwoord of een berekening/toelichting, tenzij duidelijk in de opgave staat aangegeven dat dit niet hoeft.
- **NOTA BENE:** het gebruiken van aparte bladen voor elke opgave met daarop telkens je naam en studentnummer is 10 van de 100 punten waard.

Opgave 1 (a: 6pt, b: 6pt, c: 6pt, d: 6pt, e: 6pt)
De stochasten X en Y hebben gemeenschappelijke kansdichtheid gegeven door:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{(x+y)^3} & \text{als } x > c \text{ en } y > c, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

(Hier is $c \geq 0$ een nog nader te bepalen constante.)

(a) Laat zien dat, voor alle $a, b \geq c$:

$$\mathbb{P}(X > a \text{ en } Y > b) = \frac{1}{2(a+b)}.$$

(b) Laat zien dat de cumulatieve verdelingsfunctie van X wordt gegeven door:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2(x+c)} & \text{als } x \geq c, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

(c) Wat is de waarde van c?

(d) Zijn X en Y afhankelijk of onafhankelijk?
(Motiveer je antwoord.)

(e) Wat is $\mathbb{E}X$?
(Hint: een verwachting is niet altijd een reël getal, maar kan ook ongedefinieerd of plus/min oneindig zijn.)

Opgave 2. (a: 6pt, b: 6pt, c: 6pt, d: 6pt, e: 6pt).
Laat $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. exponentiële stochasten zijn met parameter $\lambda > 0$.

(a) Laat zien dat als $a > 0$ een constante is, dan heeft $Y_1 := aX_1$ een exponentiële verdeling met parameter λ/a.
(*Hint:* het is voldoende te laten zien dat $\mathbb{P}(Y_1 \leq t) = 1 - e^{-(\lambda/a)t}$ voor alle $t > 0$.)

(b) Laat zien dat $T := \min(X_1, \dots, X_n)$ ook een exponentiële verdeling heeft, dit maal met parameter $n\lambda$.

(c) Laat zien dat, voor $0 < \alpha < 1$, het interval

$$\left(-\frac{\ln(1-\alpha/2)}{Tn}, -\frac{\ln(\alpha/2)}{Tn}\right),$$

een (exact) betrouwbaarheidsinterval is voor λ met betrouwbaarheid α.
(Hier is $\ln(.)$ weer de natuurlijke logarithme.)

(d) Zet nu $Z := X_1 + \cdots + X_n$. Laat zien dat de kansdichtheid van Z gegeven wordt door:

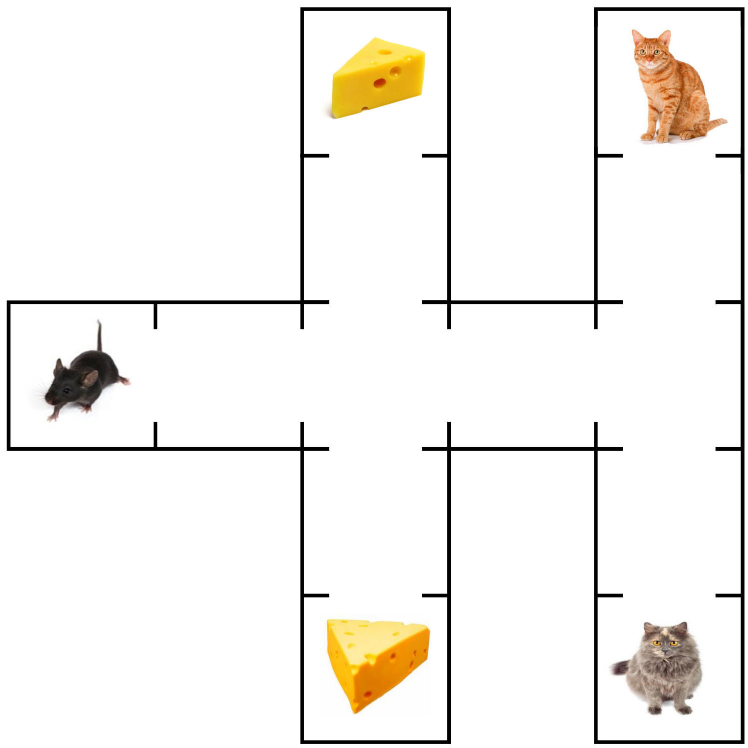
$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{\lambda^n z^{n-1} e^{-\lambda z}}{(n-1)!} & \text{als } z > 0, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

(*Hint:* dit kan met inductie en de formule voor de dichtheid van de som van twee onafhakelijke stochasten. Die formule mag je zonder bewijsgebruiken.)

(e) Geef de verwachting en variantie van T en van Z.

Z.O.Z.

Opgave 3. (a: 6pt, b: 6pt, c: 6pt, d: 12pt).
Een muis, **twee** kazen en **twee** katten bevinden zich in een appartement met de volgende plattegrond:



De muis, die nogal vergeetachtig is, gaat telkens een willekeurige kamer binnen die grenst aan degene waar hij zich in bevindt. De katten liggen beiden te slapen en blijven constant in dezelfde kamer. Echter, zodra de muis de kamer van een kat binnen gaat, wordt deze kat wakker en eet hij de muis op. We zijn geinteresseerd in de kans dat de muis tenminste één van beide kazen vindt voordat hij door een kat wordt opgegeten.

(a) Stel een stelsel vergelijkingen op dat de kansen beschrijft dat de muis tenminste één van beide kazen vindt voordat hij door een kat wordt opgegegeten als hij in een bepaalde kamer begint.

(b) Los dit stelsel op. Wat is de kans dat de muis tenminste één van beide kazen vindt voor zijn gruwelijke einde, als hij begint in de kamer uit het diagram?

(c) Wat is het verwachte aantal muizen dat de bovenste kat zal opeten?

Nadat de muis een kaas heeft opgegeten, vervolgt hij zijn weg op precies dezelfde manier als eerder.

(d) Wat is het verwachte aantal kazen dat de muis zal opeten alvorens zelf opgegeten te worden?