Uitwerkingen van hertentamen van 21 juli 2015

Opgave 1

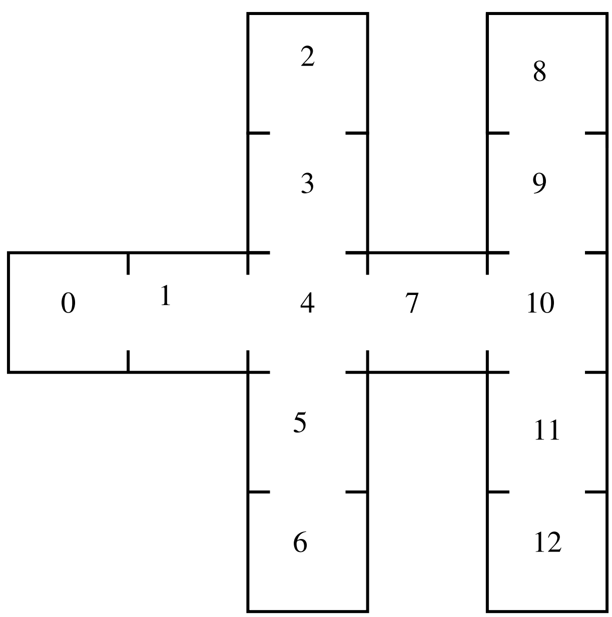
Dit was opgave 1 uit het tentamen van 18 april 2013. Zie de uitwerking daarvan.

Opgave 2

Dit was opgave 2 uit het hertentamen van 21 augustus 2014. Zie de uitwerking daarvan.

Opgave 3a

We labellen de kamers als volgt:



Het gevraagde stelsel wordt dan;

$$
\begin{aligned}
&p_2 = p_6 = 1,\\
&p_8 = p_{12} = 0,\\
&p_1 = \tfrac{1}{2}(p_0 + p_4),\\
&p_3 = \tfrac{1}{2}(p_2 + p_4),\\
&p_4 = \tfrac{1}{4}(p_1 + p_3 + p_5 + p_7),\\
&p_5 = \tfrac{1}{2}(p_4 + p_6),\\
&p_7 = \tfrac{1}{2}(p_4 + p_{10}),\\
&p_9 = \tfrac{1}{2}(p_8 + p_1 0),\\
&p_{10} = \tfrac{1}{3}(p_7 + p_9 + p_{11}),\\
&p_{11} = \tfrac{1}{2}(p_{10} + p_{12}).
\end{aligned}
$$

Gezocht is p_0.

Opgave 3b

Uit een rekenpartij volgt $p_0 = \frac{3}{4}$.
(Die rekenpartij moest je in je uitwerking natuurlijk wel in detail geven.)

Opgave 3c

Het correcte antwoord is $\frac{1}{2}$. Merk op dat het verwachte aantal muizen dat de bovenste kat zal opeten gelijk is aan de kans dat de muis de kamer van de bovenste kat bereikt alvorens de kamer met de onderste kat te bereiken. Je kunt die kans ofwel berekenen mbv. een stelsel als bij **(a)**, maar nu met randvoorwaarden $p_8 = 1, p_{12} = 0$ en extra vergelijkingen $p_2 = p_3, p_6 = p_5$, ofwel afleiden dat ie gelijk $\frac{1}{2}$ is door (met een adequate toelichting) je te beroepen op "symmetrie".

Opgave 3d

Laat X het aantal kazen zijn dat de muis op weet te eten.
Uit **(b)** weten we : $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.
Om de kans op $\mathbb{P}(X = 2)$ te vinden redeneren we als volgt: Laat A de gebeurtenis zijn dat de muis de bovenste kaas bereikt zonder eerst de onderste kaas of een kat bereikt te hebben, en laat B de gebeurtenis zijn dat de muis de onderste kaas bereikt zonder eerst de bovenste kaas of een kat bereikt te hebben. Gegeven dat A optreedt, wordt de conditionele kans dat $X = 2$ beschreven door het stelsel als in **(a)** maar nu met randvoorwaarden $p_8 = 1, p_{12} = 0, p_6 = 1$, extra vergelijking $p_2 = p_3$, en we zoeken nu p_2. Een rekenpartij levert $\mathbb{P}(X = 2|A) = p_2 = \frac{3}{5}$.
Op precies dezelfde wijze is $\mathbb{P}(X = 2|B) = \frac{3}{5}$.
(Deze rekenpartijen moest je ook weer in detail geven in je uitwerking.)

Merk op dat de gebeurtenis $\{X = 2\}$ bevat is in de gebeurtenis $A \cup B$. (Als je allebei de kazen opeet dan heb je ofwel de bovenste kaas opgegeten alvorens de andere kaas en de katten te zijn tegengekomen, ofwel je hebt de onderste kaas opgegeten alvorens de bovenste kaas en de katten te zijn tegengekomen.)
Laat $C := (A \cup B)^c$ de gebeurtenis zijn dat A en B beide niet optreden. Merk op dat A, B, C disjunct zijn, zodat we kunnen afleiden:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 2) &= \mathbb{P}(X = 2|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(X = 2|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(X = 2|C)\mathbb{P}(C) \\ &= \tfrac{3}{5}(\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)). \end{aligned}$$

Merk nu ook op dat

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(\text{de muis eet tenmiste één kaas}) = \frac{3}{4}.$$

Dus

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{20}.$$

Er volgt nu ook dat:

$$\mathbb{P}(X = 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 2) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{9}{20} = \frac{6}{20}.$$

Dus:

$$\mathbb{E}X = 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) + 2 \cdot \mathbb{P}(X = 2) = \frac{24}{20} = \frac{6}{5}.$$