1^{e} deeltentamen Inleiding Kansrekening en Statistiek (WISB161) 2017-2018

14 december 2017

I Schrijf je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert.

II U mag geen gebruik maken van boeken, aantekeningen en/of elektronische apparatuur.

III U mag in ieder onderdeel de conclusies van voorgaande onderdelen gebruiken, ook als u die (nog) niet bewezen hebt. Als u een antwoord op een vorige deelvraag niet heeft kunnen vinden, mag u een antwoord naar keuze veronderstellen en daarmee verder rekenen. Geef duidelijk aan als u dit doet, bijvoorbeeld, "stel het antwoord op vraag 1a is 1", of "Stel het antwoord op 2a is $f_Y(y) = 1$". Als de vraag door de aanname eenvoudiger wordt kan dit tot puntenaftrek leiden.

IV Motiveer steeds uw antwoord door duidelijk aan te geven welke argumenten en welke resultaten u gebruikt om een bepaalde conclusie te trekken.

V Uitdrukkingen hoeven niet niet numeriek bepaald te worden tenzij hier expliciet om wordt gevraagd. Een antwoord als $\frac{6!}{11!}$ of $\frac{1}{7^5}$ is prima. Vereenvoudig uw antwoord wel indien mogelijk.

V1 U heeft 1,5 uur de tijd voor het tentamen.

VII Achter elke deelvraag staat het aantal punten dat met de deelvraag te behalen is. De puntenverdeling per vraag is: 1 - 15, 2 - 25, 3 - 20, 4 - 15, 5 - 15. In totaal zijn er 90 punten te behalen.

Veel succes!

Opgave 1 Zij X een discrete stochastische variabele op de uitkomstenruimte $\Omega = \{0, 1, 2\}$ met $p(k) = P(X = k) = \frac{2^k}{7}$ voor alle $k \in \Omega$ en cumulatieve dichtheidsfunctie $F(x)$.

a 5pt) Bereken de verwachtingswaarde van X.

b 5pt) Bereken de variantie van X.

c 5pt) Bepaal zowel $F(1)$ als $F(\frac{3}{2})$.

Opgave 2 Stel dat twee stochastische variabelen een gezamenlijke kansdichtheidsfunctie hebben gegeven door

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{3}{8}(x + y)^2 \quad \text{als } -1 \leq x, y \leq 1$$

en $f(x, y) = 0$ daarbuiten.

a 5pt) Bepaal de marginale dichtheid $f_Y(y)$.

b 5pt) Bepaal de verwachtingswaarde van Y.

c 5pt) Bepaal de voorwaardelijke dichtheid $f_X(x|Y = y)$ als $-1 \leq y \leq 1$.

d 5pt) Bepaal de covariantie $Cov(X, Y)$.

e 5pt) Zijn X en Y onafhankelijk? Licht je antwoord toe.

Opgave 3 In een vaas zitten 6 rode, 6 witte en 6 blauwe ballen.

a 6pt) Stel je trekt willekeurig 8 ballen zonder teruglegging. Wat is de kans dat je minstens 1 blauwe bal trekt?

b 5pt) Op hoeveel verschillende manieren kun je i rode, j witte en k blauwe ballen op volgorde leggen?

c 9pt) Stel je trekt willekeurig 4 ballen met teruglegging. Wat is de kans dat je meer blauwe ballen dan witte ballen trekt?

Opgave 4 Bij het spel "mens-erger-je-niet" mag een speler zijn eerste pion pas in het spel brengen als hij een 6 gooit met een dobbelsteen (een eerlijk, standaard, zes-zijdige dobbelsteen).

a 5pt) Met welke verdeling kun je het aantal dobbelsteenworpen tot je de eerste 6 gooit beschrijven? Geef de kansfunctie van deze verdeling.

b 5 pt) Wat is de kans dat je de eerste 4 worpen geen zes gooit?

c 5 pt) Stel dat je de eerste 4 keer geen zes hebt gegooid. Wat is de kans dat je pas bij de 10$^{\text{e}}$ worp een 6 gooit als je weet dat je bij de eerste 4 worpen geen zes hebt gegooid?

Opgave 5 Zij Ω een uitkomstenruimte en A en B elementen van Ω.

a 8pt) Stel dat $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$. Wat weten we over de voorwaardelijke kans $P(A|B)$? Met andere woorden, geldt nog steeds dat $P(A|B)$ alle elementen van $[0, 1]$ kan aannemen of weten we meer?

b 7pt) Stel $A \subseteq B$ en $0 < P(A) \leq P(B) < 1$. Wat weten we nu over de voorwaardelijke kans $P(A|B)$? Met andere woorden, geldt nog steeds dat $P(A|B)$ alle elementen van $[0, 1]$ kan aannemen of weten we meer?

Einde.