Tentamen Inleiding Kansrekening en Statistiek (WISB161) 2018-2019

31 januari 2019

I *Schrijf uw naam en studentnummer op elk vel dat u inlevert.*

II *Elke opgave van het tentamen wordt door 1 docent nagekeken. Maak daarom opgaven 1 en 2, opgave 3, opgave 4, en opgave 5 en 6 op een apart blad.*

III *Elektronische apparatuur is niet toegestaan. Het boek van Dekking et al. en 1 A4'tje met aantekeningen mag wel gebruikt worden.*

IV *U mag in ieder onderdeel de conclusies van voorgaande onderdelen gebruiken, ook als u die (nog) niet bewezen hebt. Als u een antwoord op een vorige deelvraag niet heeft kunnen vinden, mag u een antwoord naar keuze veronderstellen en daarmee verder rekenen. Geef duidelijk aan als u dit doet. Als de vraag door de aanname eenvoudiger wordt kan dit tot puntenaftrek leiden.*

V *Motiveer steeds uw antwoord door duidelijk aan te geven welke argumenten en welke resultaten u gebruikt om een bepaalde conclusie te trekken.*

VI *U heeft 3 uur de tijd voor het tentamen.*

VII *Achter elke deelvraag staat het aantal punten dat met de deelvraag te behalen is. In totaal zijn er 90 punten te behalen en 10 extra punten met de bonusvraag 4h. De puntenverdeling per vraag is: 1 - 8, 2 - 10, 3 - 15, 4 - 30(+10), 5 - 12, 6 - 15.*

Veel succes!

Opgave 1

Uit een enquete onder de klanten van een garage blijkt dat 75% van de klanten tevreden is met zijn/haar auto en 25% ontevreden. Van de tevreden klanten had 80% voor zijn/haar huidige auto een andere auto van hetzelfde merk, van de ontevreden klanten had slechts 60% hiervoor een andere auto van hetzelfde merk.

a 8pt) Wat is de kans dat een klant die hiervoor een auto van hetzelfde merk had een tevreden klant is?

Opgave 2

Zij $\theta > 1$ een parameter en zij X een continue stochastische variabele op de reële getallen met kansdichtheidsfunctie

$$f_\theta(x) = \begin{cases} (\theta - 1)x^{-\theta} & \text{voor } x \geq 1 \\ 0 & \text{voor } x < 1. \end{cases}$$

Stel dat we een willekeurig steekproef $X_1, X_2, \ldots, X_n$ van grootte n hebben waarbij alle X_i onafhankelijk en identiek verdeeld zijn als X en zij $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de realisatie van de steekproef.

a 10pt) Bepaal de meest-waarschijnlijke schatter (maximum likelihood estimate) van θ.

Opgave 3 *Gebruik een nieuw vel papier!*

Een bestaand medicijn werkt bij 80% van de patiënten. Een ziekenhuis wil gaan werken met een nieuw medicijn als ze 95% zeker zijn dat het nieuwe medicijn beter is dan het bestaande medicijn. Om dat na te gaan is het nieuwe medicijn toegediend aan 100 patiënten. Het nieuwe medicijn werkte bij 90 patiënten. U mag er vanuit gaan dat $n = 100$ voldoende groot is om limietresultaten te gebruiken.

a 5pt) Formuleer de nulhypothese en de alternatieve hypothese.

b 10pt) Is het ziekenhuis voldoende zeker om het nieuwe medicijn te gaan gebruiken?

Zie ommezijde.

Opgave 4 *Gebruik een nieuw vel papier!*
Zij $\theta \in \mathbb{R}$ en $n \geq 1$. Zij X een uniform verdeelde stochast op $(\theta - 2, \theta + 2)$, i.e., de kansdichtheidsfunctie is:

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{als } x \in (\theta - 2, \theta + 2) \\ 0 & \text{als } x \notin (\theta - 2, \theta + 2), \end{cases}$$

en zij $X_1, X_2, \ldots, X_n$ onafhankelijk, identiek verdeelde stochasten verdeeld als X. Definieer $Y_1 := \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ en $Y_n := \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$. We definiëren twee schatters T_1 en T_2 voor θ:

$$T_1 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{en } T_2 = \frac{1}{2}(Y_1 + Y_n).$$

a 4pt) Bepaal $\mathrm{E}(X)$ en $\mathrm{Var}(X)$.

b 4pt) Bepaal de cumulatieve distributiefunctie van X.

c 4pt) Zijn Y_1 en Y_n onafhankelijk? Licht je antwoord toe.

d 6pt) Bepaal de kansdichtheidsfunctie van Y_1 en Y_n in termen van de (cumulatieve) distributiefunctie van X.

e 4pt) Laat zien dat T_1 en T_2 zuivere schatters van θ zijn.

f 5pt) Bepaal $\mathrm{Var}(T_1)$.

g 3pt) Neem aan dat $\mathrm{Var}(T_2) = \frac{8}{2+3n+n^2}$. Geef aan wanneer u T_1 en wanneer u T_2 zou gebruiken als u θ wilt schatten. Neem aan dat $n \geq 3$.

h 10pt) **Bonusopgave. Advies: Doe deze opgave alleen als u tijd over hebt.** Laat zowel zien dat de gezamenlijke kansdichtheidsfunctie van Y_1 en Y_n gegeven wordt door:

$$f_{Y_1,Y_n}(y_1, y_n) = \begin{cases} \frac{n(n-1)}{4^n}(y_n - y_1)^{n-2} & \text{als } \theta - 2 < y_1 < y_n < \theta + 2 \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

als dat $\mathrm{Var}(T_2) = \frac{8}{2+3n+n^2}$.

Opgave 5 *Gebruik een nieuw vel papier!*
Zij X een uniform verdeelde stochast op het interval (0,1), en zij Y een uniform verdeelde stochast op $(1, 2)$. X en Y zijn onafhankelijke stochasten. Definieer de stochast Z door $Z = \frac{X^2}{Y}$.

a 5pt) Bepaal de kansdichtheidsfunctie van de stochast X^2.

b 7pt) Bepaal de kansdichtheidsfunctie $f_Z(z)$ van de stochast Z.

Opgave 6
Een studente wil het kookpunt van water experimenteel bepalen. Daartoe meet zij de temperatuur waarbij het water begint te koken 9 keer. Ze veronderstelt dat elke meting een onafhankelijk realisatie is van een normale verdeling met onbekend gemiddelde μ en onbekende variantie σ^2, i.e., $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ voor $1 \leq i \leq 9$. Zij vindt als temperaturen: $\{101°, 100°, 98°, 96°, 104°, 105°, 97°, 100°, 99°\}$. De studente vindt het makkelijker om met de afwijkingen van de metingen t.o.v. 100° te werken, i.e., met de stochasten $Y_i := X_i - 100$ en de realisaties $\{1, 0, -2, -4, 4, 5, -3, 0, -1\}$. Ze berekent een symmetrisch 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde van de stochasten Y_i en transformeert het gevonden 95% betrouwbaarheidsinterval naar een 95% betrouwbaarheidsinterval voor μ door 100 optellen bij zowel de gevonden ondergrens als bij de gevonden bovengrens.

a 5pt) Levert deze methode een symmetrisch 95% betrouwbaarheidsinterval voor μ?

b 10pt) Bepaal een symmetrisch 95% betrouwbaarheidsinterval voor μ.

Einde.