DEPARTEMENT WISKUNDE, FACULTEIT BÈTAWETENSCHAPPEN, UU.
IN ELEKTRONISCHE VORM BESCHIKBAAR GEMAAKT DOOR DE TBC VAN A–ESKWADRAAT.
HET COLLEGE WISB211 WERD IN 2008-2009 GEGEVEN DOOR ANDRÉ HENRIQUES.
DE UITWERKING IS SAMENGESTELD/GEMAAKT DOOR JOB KUIT.

Uitwerking[1] Functies en Reeksen (WISB211)
4 november 2008

Opgave 1.

De afzonderlijke componenten van de functie

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3; \quad (x,y) \mapsto (x^2, xy, y^2)$$

zijn alle polynomen en derhalve zijn deze componenten partieel differentieerbaar en de partiele afgeleiden zijn continu. Dit impliceert dat f totaal differentieerbaar is. (Zie St. 1.15.) De totale afgeleide van f in het punt (x,y) wordt gegeven door de matrix (t.o.v. de standaard basis in $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$)

$$\mathrm{mat}(Df(x,y)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ y & x \\ 0 & 2y \end{pmatrix}.$$

Opgave 2.

Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de functie $x \mapsto |x|^3$. Deze functie is tweemaal differentieerbaar met eerste en tweede afgeleide gelijk aan

$$\frac{df}{dx}(x) = 3|x|x \quad \text{en} \quad \frac{d^2 f}{dx^2}(x) = 6|x|.$$

De tweede afgeleide van f is continu en dus is f van klasse C^2. Aangezien de tweede afgeleide van f niet differentieerbaar is in 0, is f niet C^3.

Opgave 3.

Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de functie

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{als } y \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{als } y \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Voor iedere $y \in \mathbb{R}$ is de functie $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto f(x,y)$ constant en dus differentieerbaar. In het bijzonder6 impliceert dit dat f partieel differentieerbaar is naar de eerste variabele en

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$$

voor alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Aangezien $\lim_{v \to y} f(x,v)$ voor geen enkele $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ bestaat, is f nergens continu.

Opgave 4.

a) De functie

$$\phi : (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad (x,y) \mapsto |y| \log |x|$$

is evenals de exponentiele functie continu. Omdat f gelijk is aan $\exp \circ \phi$ op $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$, is f continu op deze verzameling.

Zij $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Stel $\epsilon > 0$. Als $\delta < \min(1, \frac{y_0}{2}, \epsilon^{\frac{2}{|y_0|}})$ en $\|(x,y) - (0, y_0)\| < \delta$, dan

$$|f(x,y) - f(0,y)| = |x|^{|y|} \le |x|^{\frac{|y_0|}{2}} \le \delta^{\frac{|y_0|}{2}} < \epsilon.$$

[1] Deze uitwerkingen zijn met de grootste zorg gemaakt. In geval van fouten kan de TBC niet verantwoordelijk worden gesteld, maar wordt zij wel graag op de hoogte gesteld: tbc@a-eskwadraat.nl

Dit impliceert dat f continu is de punten $(0, y_0)$ met $y_0 \neq 0$. Omdat

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} |x|^{|x|} = \exp(\lim_{x\to 0} |x| \log |x|) = 1 \neq 0 = f(0,0),$$

is f niet continu in de oorsprong. De conclusie is daarom dat f continu is op $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

b) De functie ϕ is partieel differentieerbaar naar beide variabelen met continue partiele afgeleiden op de verzameling $(\mathbb{R} \setminus \{0\})^2$. De partiele afgeleiden worden voor $x \neq 0$ en $y \neq 0$ gegeven door

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = |y| \operatorname{sign}(x)\, |x|^{|y|-1} \quad \text{en} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \log(|x|) \operatorname{sign}(y)\, |x|^{|y|}.$$

Merk op dat

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,y) - f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|^y - 0}{h} = \lim_{h\to 0} |h|^{|y|-1} \operatorname{sign}(h)$$

bestaat dan en slechts dan als $|y| > 1$ en in dat geval gelijk is aan 0. Verder geldt voor iedere $y \neq 0$ dat

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0,y+h) - f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0,$$

zodat geconcludeerd kan worden dat f partieel differentieerbaar is in de punten $(0,y)$ met $|y| > 1$. In deze punten zijn de partiele afgeleiden continu, wat eenvoudig aan de uitdrukkingen voor de partiele afgeleiden in de punten (x,y) met $x \neq 0$ en $y \neq 0$ gezien kan worden. Stelling 1.15 impliceert nu dat f totaal differentieerbaar is op de verzameling

$$U = (\mathbb{R} \setminus \{0\})^2 \cup \big(\{0\} \times (\mathbb{R} \setminus [-1,1])\big).$$

Omdat niet alle partiele afgeleiden van f bestaan in de punten $(0,y)$ met $|y| \leq 1$ is f volgens Stelling 1.15 niet totaal differentieerbaar in deze punten.
Stel $a, b \neq 0$, dan geldt volgens de stelling van Taylor voor de exponentiele functie

$$\frac{f(x+ta, tb) - f(x,0)}{t} = \frac{e^{|tb| \log |x+ta|} - 1}{t} = |b| \operatorname{sign}(t) \log |x+ta| + R(t),$$

waarbij de absolute waarde van de restterm $R(t)$ kleiner is dan of gelijk is aan een constante (onafhankelijk van t) maal $|t|$. De limiet voor $t \to 0$ van deze uitdrukking bestaat niet tenzij $|x| = 1$ en dus is f niet partieel differentieerbaar in $(x,0)$ met $x \neq 0$ en $|x| \neq 1$. Volgens Stelling 1.15 is f nu ook niet totaal differentieerbaar in deze punten. In de punten $(\pm 1, 0)$ bestaan alle richtingsafgeleiden van f wel en zijn gelijk aan 0. Dit doet vermoeden dat f in deze punten totaal differentieerbaar is met totale afgeleide gelijk aan 0. Dit is inderdaad het geval aangezien met behulp van de stelling van Taylor kan worden ingezien dat

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|f(\pm 1 + h_1, h_2) - f(\pm 1, 0)|}{\|(h_1,h_2)\|} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|e^{|h_2| \log |\pm 1 + h_1|} - 1|}{\|(h_1,h_2)\|}$$

bestaat en gelijk is aan 0. Samenvattend kan geconcludeerd worden dat de verzameling waarop f totaal differentieerbaar is, gelijk is aan

$$U \cup \{(\pm 1, 0)\}.$$

Opgave 5.

a) Stel $f : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\} \to \mathbb{R}$ is een functie. Er geldt

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y)) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y))$$

mits al deze limieten bestaan. (Zie Gevolg 2.2.)

b) De conditie bestaat uit drie onderdelen:
Er bestaat een $\delta_1 > 0$ zodanig dat $\lim_{y\to 0} f(x,y)$ bestaat voor alle $x \in (0,\delta_1)$ en $\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y))$ bestaat:

$$\exists_{c\in\mathbb{R}}\exists_{\delta_1>0}\forall_{0<x<\delta_1}\exists_{c_x\in\mathbb{R}} : \begin{cases} \forall_{\epsilon_1>0}\exists_{\delta_2>0}\forall_{0<y<\delta_2} : |f(x,y)-c_x| < \epsilon_1 \\ en \\ \forall_{\epsilon_2>0}\exists_{0<\delta_3<\delta_1}\forall_{0<x<\delta_3} : |c_x - c| < \epsilon_2 \end{cases}$$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ bestaat:

$$\exists_{c\in\mathbb{R}}\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{(x,y)\in\mathbb{R}^2_{>0},\|(x,y)\|<\delta} : |f(x,y) - f(0,0)| < \epsilon$$

Er bestaat een $\delta_1 > 0$ zodanig dat $\lim_{x\to 0} f(x,y)$ bestaat voor alle $y \in (0,\delta_1)$ en $\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y))$ bestaat:

$$\exists_{c\in\mathbb{R}}\exists_{\delta_1>0}\forall_{0<y<\delta_1}\exists_{c_y\in\mathbb{R}} : \begin{cases} \forall_{\epsilon_1>0}\exists_{\delta_2>0}\forall_{0<x<\delta_2} : |f(x,y)-c_y| < \epsilon_1 \\ en \\ \forall_{\epsilon_2>0}\exists_{0<\delta_3<\delta_1}\forall_{0<y<\delta_3} : |c_y - c| < \epsilon_2 \end{cases}$$

c) Zij $f : (\mathbb{R}_{>0})^2 \to \mathbb{R}$ de functie $(x,y) \mapsto \frac{x^2}{x^2+y^2}$. Nu geldt

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y)) = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

en

$$\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y)) = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

Opgave 6.

Zij $t > 0$.

$$\int_0^c \frac{1}{(x^2+t)^2}\,dx = -\int_0^c \frac{d}{dt}\frac{1}{x^2+t}\,dx = -\frac{d}{dt}\int_0^c \frac{1}{x^2+t}\,dx.$$

Voor de laatste gelijkheid is gebruik gemaakt van de stelling voor verwisseling van differentiatie en integratie. Toepassing van deze stelling is toegestaan omdat de functie $f : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \ni (t,x) \mapsto \frac{1}{x^2+t}$ continu differentieerbaar is. (Dit impliceert in het bijzonder dat voor iedere $t > 0$ de functie $x \mapsto f(t,x)$ Riemann-integreerbaarheid is over $[0,c]$ en dat f partieel differentieerbaar is naar de eerste variabele met continue partiele afgeleide.) De variabelensubstitutie $y = \frac{x}{\sqrt{t}}$ leidt tot

$$\int_0^c \frac{1}{x^2+t}\,dx = \frac{\sqrt{t}}{t}\int_0^{\frac{c}{\sqrt{t}}} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{\sqrt{t}}\arctan\left(\frac{c}{\sqrt{t}}\right).$$

We kunnen nu concluderen dat

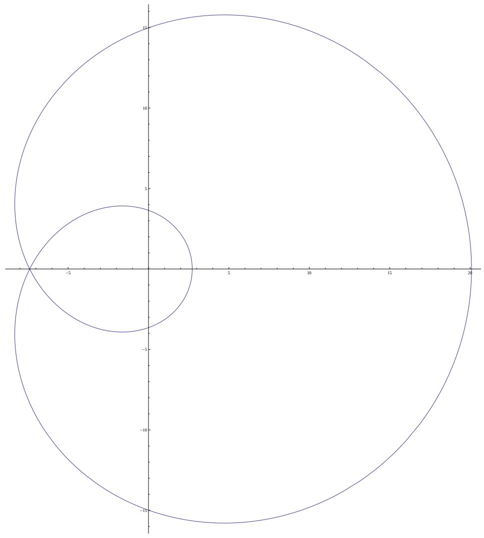
$$\int_0^c \frac{1}{(x^2+t)^2}\,dx = -\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{t}}\arctan\left(\frac{c}{\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}\arctan\left(\frac{c}{\sqrt{t}}\right) + \frac{c}{2}\frac{1}{c^2t+t^2}.$$

Opgave 7.

a) Zie figuur 1.

b) Het windingsgetal van γ rond 0 is

$$W_0(\gamma) = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\,dt = 2.$$



Figuur 1: De kromme γ.

Opgave 8.

Zij ω de differentiaalvorm op $\mathbb{R}^2$ gegeven door $\omega(x,y) = y\,dx - x\,dy$. Merk op dat ω een C^1 differentiaalvorm is. Omdat $\mathbb{R}^2$ enkelvoudig samenhangend is, is ω exact dan en slechts dan als ω gesloten is. (Zie Gevolg 3.22.) Aangezien $\omega = g_1\,dx + g_2\,dy$, met $g_1 : \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto y$ en $g_2 : \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto -x$, is ω gesloten dan en slechts dan als

$$\frac{\partial g_1}{\partial y} = \frac{\partial g_2}{\partial x}.$$

Dit is niet het geval, want

$$\frac{\partial g_1}{\partial y} = 1 \quad \text{en} \quad \frac{\partial g_2}{\partial x} = -1.$$

De differentiaalvorm ω is dus niet exact.