Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college WISB211 werd in 2009/2010 gegeven door A. Henriques.

Functies en Reeksen (WISB211)
3 november 2009

Opgave 1

Zij $f = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ en $g = (g_1, g_2) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ differentieerbare functies en zij $h = (h_1, h_2) := g \circ f$. Gegeven is dat

$$f(1,1) = (1,2,3) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = (1,4,6) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = (2,3,5)$$

$$g_1(1,2,3) = 1 \qquad g_2(1,2,3) = 1 \qquad Dg_1(1,2,3) = (1,2,2) \qquad Dg_2(1,2,3) = (0,1,1)$$

Bereken $\frac{\partial h_1}{\partial x}(1,1)$.

Opgave 2

Geef een voorbeeld van een functie die twee keer differentieerbaar is maar niet $\mathcal{C}^2$.

Opgave 3

Bewijs dat $f(x) := \int_0^1 \frac{t^x}{2-t}\,dt$ continu is op $(-1, \infty)$.

Opgave 4

Zij $\omega := \sin x\,dx + \cos y\,dy$ een differentiaalvorm op $\mathbb{R}^2$. Geef een kromme $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ zodat $\int_\gamma \omega = 4$ of bewijs dat een dergelijke kromme niet bestaat.

Opgave 5

Bereken de oneigenlijke lijnintegraal

$$\int_\gamma \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2},$$

waarbij $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gegeven wordt door de formule $\gamma(t) := (t, \cos t)$.

Opgave 6

Zij ω een differentiaalvorm op $\mathbb{R}^2 - \{(0,1),(0,-1)\}$. Zij ω_1 de beperking van ω tot $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>-1} - \{(0,1)\}$ en zij ω_2 tot $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{<1} - \{(0,1)\}$. Bewijs dat

$$(\omega_1 \text{ is exact en } \omega_2 \text{ is exact }) \Leftrightarrow (\omega \text{ is exact}).$$