Tweede deeltentamen Functies en Reeksen

19 januari 2012, 9.00 - 12.00 uur

- Schrijf op ieder vel **je naam**, en bovendien op het eerste vel je **studentnummer**, de naam van je **practicumleider** (Jan Jitse Venselaar, Wouter Stekelenburg) en het **aantal ingeleverde vellen**.
- Geef niet alleen antwoorden; laat ook zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent.
- **N.B.** Als je een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- **N.B.** Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, **ga dan toch door met de volgende onderdelen.** Je mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- Rekenmachine, diktaat en aantekeningen mogen niet worden gebruikt.
- Alle 3 opgaven tellen even zwaar.

Succes !

Opgave 1 In het vervolg veronderstellen we dat $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Voorts veronderstellen we dat $f, g : D \to \mathbb{C}$ functies zijn die gegeven worden door convergente machtreeksontwikkelingen:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad \text{en} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n, \qquad (z \in D).$$

(a) Bewijs: als $f(z) = g(z)$ voor alle $z \in D$ dan is $c_n = d_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Bewijs dat voor alle $z \in \cancel{\mathbb{C}}$ D geldt:

$$(2 + z) f(z) = 2c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (2c_n + c_{n-1}) z^n.$$

In het vervolg veronderstellen dat $\lambda \in \mathbb{C}$, dat $f(0) = 1$ en dat

$$(2 + z) \frac{df}{dz}(z) = \lambda f(z) \qquad (z \in D).$$

(c) Bewijs dat $c_1 = \lambda/2$ en dat $2(n + 1)c_{n+1} = (\lambda - n)c_n$ voor alle $n \geq 1$.

(d) Bepaal de convergentiestraal van de machtreeks $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$ als gegeven is dat $\lambda \notin \mathbb{N}$.

(e) Wat kun je zeggen over de convergentiestraal van de machtreeks $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$ als gegeven is dat $\lambda \in \mathbb{N}$?

Opgave 2 In deze opgave is $0 < s < \pi$ constant. We beschouwen de 2π-periodieke functie die op het interval $[-\pi, \pi]$ gegeven wordt door

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } |x| \leq s \\ 0 & \text{als } s < |x| \leq \pi. \end{cases}$$

(a) Bereken de complexe Fourier-coëfficiënten $c_k := (\mathcal{F}f)_k$, voor alle $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Laat zien dat de reële Fourier-reeks van f de volgende vorm heeft:

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx; \qquad (**)$$

Bepaal daarbij expliciet de coëfficiënten a_k.

(c) Voor welke waarden van $x \in [-\pi, \pi]$ convergeert de Fourier-reeks (**) naar $f(x)$. Wat kunt u zeggen over de limiet van de Fourier-reeks (**) in de overige waarden van $x \in [-\pi, \pi]$.

(d) Voor welke waarden van s weten we zeker dat de Fourier-reeks (**) uniform convergeert op $[0, \pi/2]$? Motiveer uw antwoord.

(e) Laat zien dat voor alle $0 < s < \pi$ geldt dat $\frac{\pi}{2} = s + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2ks}{k}$.

Opgave 3 We beschouwen een continue functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die bovendien 2π-periodiek is. We noteren $c_k = (\mathcal{F}f)_k$ (voor $k \in \mathbb{Z}$) en $\|f\|_{\mathbb{R}} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$.

(a) Toon aan dat voor alle $k \in \mathbb{Z}$ geldt dat $|c_k| \leq \|f\|_{\mathbb{R}}$.

(b) Toon aan dat voor iedere $s > 0$ door

$$f_s(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx - s|k|}$$

een continue functie $f_s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gedefinieerd wordt. Toon aan dat deze functie 2π-periodiek is.

(c) Geef de definitie van de kwadraatintegraalnorm $\|f_s - f\|_2$. Bewijs tevens dat

$$\|f - f_s\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 - e^{-s|k|})^2 |c_k|^2.$$

(d) Bewijs dat voor alle $N > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zo dat voor alle $0 < s < \delta$ geldt:

$$\|f - f_s\|_2^2 < \frac{1}{N} + \sum_{|k| > N} |c_k|^2.$$

(e) Bewijs dat $\|f - f_s\|_2 \to 0$ voor $s \downarrow 0$.