Tentamen voor *Functies en Reeksen* (WISB211). A. Henriques, Jan 2010.

Opgave 1 Zij $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ een functie zodanig dat $z \mapsto f(z)$ en $z \mapsto \overline{f(z)}$ beide complex differentieerbaar zijn. Laat zien dat f constant is. [4 pt]

Opgave 2 Volgens een stelling uit het dictaat geldt, voor een rij van Riemann integreerbare functies $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ die uniform naar een Riemann integreerbare functie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ convergeert, dat [8 pt]

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

- Bewijs deze stelling.
- Geef een tegenvoorbeeld als je het woord "uniform" vergeet.
- Geef een tegenvoorbeeld als je $[0,\infty)$ in plaats van $[0,1]$ gebruikt.

Opgave 3 Zij $f : S^1 \to \mathbb{R}$ een continue functie en zij $g : S^1 \to \mathbb{R}$ een trigonometrische veelterm. Bewijs dat [6 pt]

$$f \star g : S^1 \to \mathbb{R}$$
$$(f \star g)(x) := \int_{S^1} f(t)g(x-t)\,dt$$

weer een trigonometrische veelterm is.

Opgave 4 Zij $\mathcal{F} : \{\text{functies op } S^1\} \to \{\text{functies op } \mathbb{Z}\}$ de Fourier transformatie en zij $\mathbf{T}^k : \{\text{functies op } S^1\} \to \{\text{functies op } S^1\}$ de operator [10 pt]

$$\Big(\mathbf{T}^k(f)\Big)(x) := \sum_{n=-k}^{k} \mathcal{F}(f)_n\, e^{inx}.$$

Zij $h_n : S^1 \to \mathbb{R}$ de functie met waarde n op het interval $[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}]$ en waarde nul op het rest van S^1.
- Bereken de limiet $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{T}^k(h_n)$. Is de convergentie van deze limiet uniform? Waarom?
- Bereken de limiet $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{T}^k(h_n)$. Is de convergentie van deze limiet uniform? Waarom?

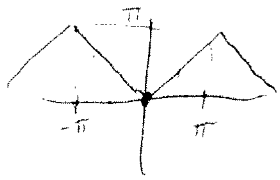
Opgave 5 Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de 2π-periodieke uitbreiding van [6 pt]

$$f(x) := |x| \qquad \text{voor } x \in [-\pi, \pi].$$

Bereken de Fourierreeks van f. Gebruik $f(0) = 0$ om $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ te berekenen.

$\int(f'g) = fg - \int fg'$

$(|x|x)' = |x| + \frac{x|x|}{x} = 2|x|$



$\int |x|dx = \frac{1}{2}|x|x$

$e^{-kx} = e^{-k}(\cos x + i \sin x)$