Mathematisch Instituut, Faculteit Wiskunde en Informatica, UU.
In electronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A−Eskwadraat.
Het college WISB211 werd in 2003/2004 gegeven door Prof. Dr. J.J. Duistermaat.

Functies en Reeksen A (WISB211)
12 november 2003

Eerste deeltentamen Functies en Reeksen, 12 november 2003, 14-17 uur.
U mag in ieder onderdeel de conclusies van voorgaande onderdelen gebruiken, ook als u die (nog) niet bewezen hebt. Veel succes!

Opgave 1

Zij U een open deelverzameling van $\mathbf{R}^3$. Voor iedere differentieerbare afbeelding $g : U \to \mathbf{R}^3$ is de *rotatie* $\operatorname{rot} g$, resp. de *divergentie* $\operatorname{div} g$ van het vectorveld g gedefinieerd door

$$(\operatorname{rot} g)_1 = \mathrm{D}_2 g_3 - \mathrm{D}_3 g_2, \quad (\operatorname{rot} g)_2 = \mathrm{D}_3 g_1 - \mathrm{D}_1 g_3, \quad (\operatorname{rot} g)_3 = \mathrm{D}_1 g_2 - \mathrm{D}_2 g_1,$$

resp.

$$\operatorname{div} g = \mathrm{D}_1 g_1 + \mathrm{D}_2 g_2 + \mathrm{D}_3 g_3.$$

Merk op dat $\operatorname{rot} g$ een vectorveld is en $\operatorname{div} g$ een scalairwaardige functie.

Zij $v : U \to \mathbf{R}^3$ tweemaal continu differentieerbaar. Bewijs $\operatorname{div}(\operatorname{rot} v) = 0$. Geef hierbij aan welke stelling(en) u gebruikt en verifieer dat aan de voorwaarde(n) in die stelling(en) is voldaan.

Opgave 2

Definieer, voor iedere $a \in \mathbf{R}$, de kromme γ_a door $\gamma_a(t) = (a + \cos t, \sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$. Definieer verder, voor $a \neq \pm 1$,

$$I(a) = \int_{\gamma_a} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}\, \mathrm{d}x + \frac{x}{x^2 + y^2}\, \mathrm{d}y \right).$$

i) Maak, in één figuur, een schets van γ_a voor $a = 1/2$ en voor $a = 2$ en markeer daarin ook de oorsprong, waar de differentiaalvorm in de integraal zich singulier gedraagt. Merk op dat voor $a = \pm 1$ de kromme γ_a door dat singuliere punt heenloopt.

ii) Bewijs dat de functie I constant is op het interval $]-1, 1[$ en constant is op het interval $]1, \infty[$.

iii) Bewijs dat

$$I(a) = \int_0^{2\pi} \frac{1 + a\ \cos t}{a^2 + 1 + 2a\cos t}\ \mathrm{d}t.$$

Bepaal het rechterlid voor $a = 0$ en bepaal de limiet van het rechterlid voor $a \to \infty$. Bewijs dat

$$(*) \qquad \int_0^{2\pi} \frac{1 + a\ \cos t}{a^2 + 1 + 2a\cos t}\ \mathrm{d}t = \begin{cases} 2\pi & \text{als} \quad -1 < a < 1, \\ 0 & \text{als} \quad a > 1. \end{cases}$$

Wat wordt het linkerlid in $(*)$ voor $a = 1$?

Opgave 3

Voor $R > 1$ definiëren we de gesloten keten $\delta = \delta_R$ van krommen in het complexe vlak bestaande uit $r\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}$, $0 \le r \le R$, gevolgd door $R\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $-\pi/4 \le \theta \le \pi/4$, gevolgd door $r\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$, $0 \le r \le R$ doorlopen in de tegengestelde richting.

a) Maak een schets van δ_R en geef daarin alle nulpunten aan van de functie $z^4 - 1$.

b) Bewijs dat er een functie f bestaat waarvoor

$$\frac{1}{z^4 - 1} = \frac{f(z)}{z - 1},$$

waarvoor f complex differentieerbaar is met continue afgeleide in $\mathbf{C} \setminus \{\mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}\}$ en waarvoor $f(1) = 1/4$.

c) Bewijs dat

$$\int_{\delta_R} \frac{1}{z^4 - 1}\ \mathrm{d}z = \frac{2\pi\,\mathrm{i}}{4}.$$

d) Bewijs door uitschrijven van het linkerlid in c) en de limiet te nemen voor $R \to \infty$ dat

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1}\ \mathrm{d}x = \frac{\pi/4}{\sin(\pi/4)}.$$

e) **(Bonus)** Bewijs dat voor iedere $m > 1$ geldt dat

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^m + 1}\ \mathrm{d}x = \frac{\pi/m}{\sin(\pi/m)}.$$