Tentamen Functies en Reeksen

7 november 2013, 13:30 - 16:30 uur

- Schrijf op ieder vel **je naam** en bovendien op het eerste vel je **studentnummer**, de naam van je **practicumleider** (Joey van der Leer, Ka Yin Leung, Shan Shah) en het **aantal ingeleverde vellen**.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent.
- **N.B.** Als je een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- **N.B.** Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, **ga dan toch door met de volgende onderdelen.** Je mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- Rekenmachine, telefoon, computer, diktaat en aantekeningen mogen niet worden gebruikt.
- Alle 4 opgaven tellen even zwaar, elk voor 10 punten. Bij de laatste opgave zijn in een laatste onderdeel nog 4 extra punten te verdienen.

Succes !

Opgave 1 We beschouwen de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(0,0) = 0$ en

$$f(x,y) = \frac{x^2 y^3}{(x^2+y^2)^2}, \qquad ((x,y) \neq (0,0)).$$

2 pt (a) Bewijs dat f op de open verzameling $V := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ totaal differentieerbaar is en bepaal voor $(x,y) \in V$ de totale afgeleide $Df(x,y)$.

3 pt (b) Bewijs dat f in $(0,0)$ richtingsdifferentieerbaar is en bepaal voor elke $v \in \mathbb{R}^2$ de richtingsafgeleide $D_v f(0,0)$.

2 pt (c) Toon aan dat f in $(0,0)$ partieel differentieerbaar is en bepaal de partiële afgeleiden van f in $(0,0)$.

3 pt (d) Is de functie f in $(0,0)$ totaal differentieerbaar? Motiveer uw antwoord.

Opgave 2 We beschouwen een rij continue functies $f_n : [0,\infty[\to \mathbb{C}$, $(n \geq 0)$, en een functie $f : [0,\infty[\to \mathbb{C}$. Gegeven is dat $|f_n(x)| \leq 1$ voor alle $n \geq 0$ en $x \in [0,\infty[$. Gegeven is verder dat $f_n \to f$ uniform op $[0,R]$ voor $n \to \infty$, voor alle $R > 0$.

1 pt (a) Bewijs dat $|f(x)| \leq 1$ voor alle $x \in [0,\infty[$.

2 pt (b) Bewijs dat f continu is op $[0,\infty[$.

2 pt (c) Bewijs dat voor iedere $R > 0$ geldt

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^R e^{-t} f_n(t)\, dt = \int_0^R e^{-t} f(t)\, dt.$$

ZOZ

2 pt (d) Bewijs dat de oneigenlijke integralen $\int_0^\infty e^{-t} f_n(t)\, dt$ en $\int_0^\infty e^{-t} f(t)\, dt$ convergeren.

3 pt (e) Bewijs dat

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty e^{-t} f_n(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-t} f(t)\, dt.$$

(je mag niet volstaan met een bekend citaat te citeren).

Opgave 3 Voor $0 < a < 1$ beschouwen we de 2π-periodieke functie $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die op $]-\pi, \pi]$ gedefinieerd is door

$$f_a(x) = e^{iax}, \qquad (-\pi < x \leq \pi).$$

3 pt (a) Bepaal $(\mathcal{F} f_a)_k$ voor elke $k \in \mathbb{Z}$.

3 pt (b) Bewijs dat voor elke $0 < a < 1$ de volgende formule geldt:

$$\left(\frac{\pi}{\sin a\pi}\right)^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k-a)^2}$$

4 pt (c) Zij $0 < \delta < 1/2$. Bewijs dat de reeks in (b) uniform in de variabele a convergeert voor $a \in [\delta, 1-\delta]$.

Opgave 4

1 pt (a) Toon aan dat de machtreeks $\sum_{k\geq 1}(-1)^{k+1}k^{-1}z^k$ convergentiestraal 1 heeft.

2 pt (b) Zij $D = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$. Toon aan dat de functie $h : D \to \mathbb{C}$ gedefinieerd door

$$h(z) := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^k}{k}$$

complex differentieerbaar is met afgeleide $h'(z) = (1+z)^{-1}$.

2 pt (c) Toon aan dat voor alle $z \in D$ geldt $e^{-h(z)}(1+z) = 1$.

3 pt (d) Bewijs dat $\lim_{z\to 0} z^{-1}h(z) = 1$ en tevens dat voor iedere $z \in \mathbb{C}$ geldt

$$\lim_{n\to\infty} nh\left(\frac{z}{n}\right) = z.$$

2 pt (e) Bewijs dat voor iedere $z \in \mathbb{C}$ geldt:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z.$$

4 pt (f) **Deze vraag valt strikt genomen buiten het tentamen. Er zijn 4 extra punten mee te verdienen:** Toon aan voor elke $R > 0$ de convergentie in (f) uniform is voor z in de verzameling $V = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$.