Uitwerking herkansing Functies en Reeksen

3 januari 2014, 9:00 - 12:00 uur

Opgave 1

(a) De functie φ is partieel differentieerbaar, met partiële afgeleiden

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) = (1,1)^{\mathrm{T}} \quad \text{en} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) = (-v,v)^{\mathrm{T}}.$$

Deze partiële afgeleiden zijn continue functies van (x,y). Volgens een stelling is φ daarom overal totaal differentieerbaar, met totale afgeleide gegeven door

$$D\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -v \\ 1 & v \end{pmatrix}.$$

(b) De functie F is partieel differentieerbaar met continue partële afgeleiden dus totaal differentieerbaar. Wegens de kettingregel is de samenstelling $f = F \circ \varphi$ totaal differentieerbaar, met totale afgeleide

$$Df(x,y) = DF(\varphi(x,y) \circ D\varphi(x,y) = (D_1F(\varphi(x,y)) \ \ D_2F(\varphi(x,y))D\varphi(x,y).$$

Hieruit volgt dat

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = D_1F(\varphi(x,y)) + D_2F(\varphi(x,y))$$

en

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -vD_1F(\varphi(x,y)) + vD_2F(\varphi(x,y)).$$

(c) Door (b) toe te passen op de functies D_1F en D_2F in plaats van F vinden we

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-vD_1F(\varphi(x,y)) + vD_2F(\varphi(x,y))\right) \\ &= -vD_1^2F(\varphi(x,y)) - vD_2D_1F(\varphi(x,y)) + vD_1D_2F(\varphi(x,y)) + vD_2^2F(\varphi(x,y)). \end{aligned}$$

Aangezien F een C^2 functie is, geldt $D_1D_2F = D_2D_1F$. We concluderen dat

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -vD_1^2F(\varphi(x,y)) + vD_2^2F(\varphi(x,y)).$$

Opgave 2

(a) Noem de integrand $\varphi(t)$. Dan is φ een continue dus lokaal Riemann-integreerbare functie op $]0, \infty[$. Voor $0 < t \leq 1$ geldt dat

$$|\varphi(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$$

terwijl de functie aan de rechterkant van de ongelijkheid integreerbaar is op $]0, 1]$. Met het majorantie criterium volgt dat de integraal $\int_0^1 \varphi(t)\, dt$ convergent is.

Voor $t \geq 1$ geldt dat

$$|\varphi(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{t}\; t^2} = t^{-5/2}.$$

De functie aan de rechterkant is oneigenlijk integreerbaar over $[1, \infty[$. Met het majorantie criterium volgt dat φ oneigenlijk integreerbaar is over $[1, \infty[$. De functie φ is dus oneigenlijk integreerbaar over zowel $]0, 1]$ als $[1, \infty[$. We concluderen dat de gegeven integraal convergent is.

(b) Noem de integrand $\psi(x, t)$. De functie $\psi : \mathbb{R}\times]0, \infty[\to \mathbb{R}$ is continu, en voor alle $x \in \mathbb{R}$ en $t > 0$ geldt dat

$$|\psi(x, t)| \leq |\varphi(t)|$$

waarbij φ, gedefinieerd zoals boven, oneigenlijk integreerbaar is op $]0, \infty[$. Met een stelling uit het dictaat volgt dat f continu is op $\mathbb{R}$.

(c) We definiëren ψ als in (b). Er geldt dat ψ partieel differentieerbaar is naar de eerste variabele, met partiële afgeleide

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, t) = -\frac{\sqrt{t}\sin xt}{1 + t^2}.$$

Deze partiële afgeleide is continu op $\mathbb{R}\times]0, \infty[$ terwijl

$$\left|\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, t)\right| \leq \frac{\sqrt{t}}{1 + t^2}.$$

voor alle $(x, t) \in \mathbb{R}\times]0, \infty[$.

De functie in het rechterlid is oneigenlijk integreerbaar over $[0, \infty[$ dus volgt met een stelling uit het dictaat dat f differentieerbaar is met afgeleide gegeven door

$$f'(x) = \int_0^\infty \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, t)\; dt = -\int_0^\infty \frac{\sqrt{t}\sin xt}{1 + t^2}\; dt.$$

In het bijzonder vinden we dat $f'(0) = \int_0^\infty 0\; dt = 0$.

Opgave 3

(a) Laat $f, g \in \mathcal{B}$ zijn en $x \geq 0$. Dan geldt dat

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |g(x) + (f(x) - g(x))| \\ &\leq |g(x)| + |f(x) - g(x)| \leq |g(x)| + \|f - g\|_{[0,\infty[}. \end{aligned}$$

(b) Zij $\epsilon > 0$. Er bestaat een $N \in \mathbb{N}$ zo dat voor $n \geq N$ geldt dat $\|f_n - f\|_{[0,\infty[} < \epsilon/2$. In het bijzonder geldt dit voor $n = N$. Uit $\lim_{x\to\infty} f_N(x) = 0$ volgt dat er een $R > 0$ bestaat zo dat

$$x > R \Rightarrow |f_N(x)| < \epsilon/2.$$

We concluderen dat voor $x > R$ geldt:

$$|f(x)| \leq |f_N(x)| + \|f_N - f\|_{[0,\infty[} < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Hieruit volgt dat voor iedere $\epsilon > 0$ een $R > 0$ bestaat zo dat $x > R \Rightarrow |f(x)| < \epsilon$. Dus $\lim_{x\to\infty} |f(x)| = 0$.

(c) Het is een bekend resultaat uit het dictaat dat de metrische ruimte $\mathcal{B}$ (voorzien van de uniforme afstand) volledig is. Laat (f_n) een Cauchy-rij in $\mathcal{B}_0$ zijn. Dan is (f_n) ook een Cauchy-rij in $\mathcal{B}$. Uit de volledigheid van $\mathcal{B}$ volgt dat er een $f \in \mathcal{B}$ bestaat zo dat $f_n \to f$ in $\mathcal{B}$. Uit onderdeel (b) volgt dat $f \in \mathcal{B}_0$. Verder geldt $d(f_n, f)_{\mathcal{B}_0} = d(f_n, f)_{\mathcal{B}} = \|f_n - f\|_{[0,\infty[} \to 0$, dus $f_n \to f$ in $\mathcal{B}_0$.

Opgave 4

(a) Het gaat hier om een machtreek rond het punt i. De coefficient van de machtreeks is $c_k = k$. Er geldt dat

$$\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| = \frac{k+1}{k} \to 1,$$

dus de convergentiestraal van de machtreeks wordt gegeven door $\rho = 1/1 = 1$.

(b) Schrijf $c_k = \frac{1}{k^2+2^k}$. Er geldt dat

$$\frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{k^2 + 2^k}{(k+1)^2 + 2^{k+1}} = \frac{k^2 2^{-k} + 1}{(k+1)^2 2^{-k} + 2} \to \frac{0+1}{0+2} = \frac{1}{2}.$$

Hieruit volgt dat de convergentiestraal van de machtreeks gelijk is aan $1/\frac{1}{2} = 2$.

(c) We beschouwen eerst de machtreeks $\sum_{k\geq 0}(k+2)^{-1} w^k$. Schrijf $c_k = (k+2)^{-1}$. Dan geldt dat

$$\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| = \frac{k+3}{k+2} = \frac{1+3k^{-1}}{1+2k^{-1}} \to 1,$$

dus de convergentiestraal van de machtreeks is 1/1. De reeks convergeert dus voor $|w| < 1$ en divergeert voor $|w| > 1$. De machtreeks uit (a) ontstaat uit deze machtreeks door de substitutie $z = w^2$. Die machtreeks convergeert dus voor $|z^2| < 1$ dus voor $|z| < 1$ en hij divergeert $|z^2| > 1$ dus voor $|z| > 1$. De gegeven machtreeks heeft dus convergentiestraal 1.

Opgave 5

(a) De Fourier coëfficiënt wordt gegeven door

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_a(t)e^{-ikt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-a\pi}^{a\pi} e^{-ikt}\,dt.$$

Hieruit volgt dat $c_0 = a$, terwijl voor $k \neq 0$ geldt dat

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-ikt}}{-ik}\right]_{-a\pi}^{a\pi} = \frac{e^{ika\pi} - e^{-ika\pi}}{2\pi k i} = \frac{\sin ka\pi}{k\pi}.$$

(b) De functie f_a is stuksgewijs C^1. Met een stelling uit het dictaat geldt dat de limiet bestaat voor alle x. Voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt dat

$$L(x) = \frac{1}{2}(f_a(x+) + f_a(x-)).$$

In het bijzonder is de functie L periodiek met periode 2π. Voor $|x| < a\pi$ geldt dat $L(x) = f_a(x) = 1$. Voor $a\pi < |x| \leq \pi$ geldt dat $L(x) = f_a(x) = 0$. Tenslotte is $L(-a\pi) = L(a\pi) = 1/2$.

(c) Omdat de functie f_a stuksgewijs C^1 is geldt de gelijkheid van Parseval, dus

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f_a(t)|^2\,dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2.$$

De integraal in het linkerlid is gelijk aan

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi a}^{\pi a} dt = a.$$

De som in het rechterlid is gelijk aan

$$a^2 + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{\sin ka\pi}{k\pi}\right)^2 = a^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sin ka\pi}{k\pi}\right)^2.$$

We concluderen dat

$$a(1-a) = a - a^2 = 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sin ka\pi}{k\pi}\right)^2.$$

(d) Voor elke $a \in \mathbb{R}$ en elke $k \geq 1$ geldt dat

$$\left|\left(\frac{\sin ka\pi}{k\pi}\right)^2\right| \leq \pi^{-2}\frac{1}{k^2}.$$

De reeks $\sum_{k\geq 1} k^{-2}$ is convergent, dus met het majorantie criterium volgt dat de reeks absoluut convergeert in de variabele $a \in \mathbb{R}$. Alle termen van de reeks zijn periodiek met periode 1. Hetzelfde geldt daarom voor de som van de reeks. De functie S is volledig bepaald door zijn beperking tot het interval $[0, 1[$. Op dat interval geldt $S(a) = a(1-a)/2$.

Richtlijn bij de normering

Opgave 1

(a) 3
2 voor de opmerking dat φ C^1 is en daarom totaal differentieerbaar
1 voor de juiste berekening van de totale afgeleide

(b) 4
1 voor de redenatie dat f totaal differentieerbaar is
2 voor de juiste formulering van de kettingregel, met totale afgeleide of in termen van partiele afgeleiden
1 voor de uitwerking

(c) 3
1 voor het juist toepassen van de in (b) gevonden formule
1 voor het gebruiken dat $D_1 D_2 F = D_2 D_1 F$
1 voor de opmerking dat dit mag omdat F een C^2-functie is.

Opgave 2

(a) 5
1 voor de opsplitsing
1 voor de opmerking dat functie continu is op $]0, \infty[$. (Lokale Riemann integreerbaarheid hoeft niet genoemd)
2 voor de juiste behandeling van het stuk over $]0, 1]$.
1 voor de juiste behandeling van de integraal over $[1, infty[$.

(b) 2
1 voor de uniforme majorantie
1 voor de opmerking dat de integrand continu is en de juiste toepassing van de stelling.

(c) 3
1 voor het partieel differentieren van de integrand
1 voor de juiste majorantie en het aanroepen van de stelling.
1 voor de juiste bepaling van $f'(0)$.

Opgave 3

(a) 3
2 voor de eerste driehoeksongelijkheid
1 voor de juiste schatting met de sup-norm.

(b) 4
2 voor het eerst aangeven van het bestaan van N bij ϵ.
1 voor het aangeven van R bij ϵ en N.
1 voor de afwerking.

(c) 3
1 voor kennis van de defi van volledigheid
1 voor bekendheid met volledigheid $\mathcal{B}$
1 voor de juiste redenering.

Opgave 4

(a) 3

(b) 3

(c) 4
Opmerking: bij 4 zou men ook met limsup kunnen werken. Bij de huidige oplossing:
1 voor de substitutie
1 voor het bepalen van de convergentiestraat van de reeks met w
2 voor de redenatie die leidt tot de convergentiestraal van de reeks in z.

Opgave 5

(a) 3
1 voor de juiste formule van de coefficient
1 voor c_0
1 voor de andere coëfficiënten.

(b) 2
1 voor het noemen van stuksgewijs C^1. 1 voor de correcte beschrijving van L.

(c) 3
1 voor de juiste formulering van Parseval (stuksgewijs C^1 hoeft niet expliciet genoemd).
1 voor de berekening van de kwadraatintegraalnorm
1 voor de verdere manipulatie van de formules.

(d) 2
1 voor de juiste toepassing van de majorantiestelling
1 voor de opmerking over periodiciteit met periode 1.