Herkansing Functies en Reeksen

23 december 2014, 9:00 – 12:00 uur

- Schrijf op ieder vel **je naam** en bovendien op het eerste vel je **studentnummer**, de naam van je **practicumleider** (Arjen Baarsma, KaYin Leung, Roy Wang) en het **aantal ingeleverde vellen**.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent.
- **N.B.** Als je een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- **N.B.** Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, **ga dan toch door met de volgende onderdelen.** Je mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- Rekenmachine, diktaat en aantekeningen mogen niet worden gebruikt.
- Alle 5 opgaven tellen even zwaar.

Succes !

Opgave 1

We beschouwen de functie $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gedefinieerd door $\varphi(u,v) = (v^2 - u^2, u^2 + v^2)$.

3 pt (a) Beargumenteer dat φ totaal differentieerbaar is en bepaal $D\varphi(u,v)$ voor alle $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

We beschouwen nu een C^2-functie $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}, (x,y) \mapsto f(x,y)$.

3 pt (b) Laat zien dat de functie $g : (u,v) \mapsto f(\varphi(u,v))$ totaal differentieerbaar is op $\mathbb{R}^2$ en druk de partiële afgeleiden $\partial g/\partial u$ en $\partial g/\partial v$ uit in de partiële afgeleiden $\partial f/\partial x$ en $\partial f/\partial y$.

4 pt (c) Toon aan dat

$$\frac{\partial^2 g(u,v)}{\partial u \partial v} = 4uv \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\varphi(u,v)) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\varphi(u,v)) \right).$$

Opgave 2

3 pt (a) Toon aan dat de functie $h : t \mapsto (1+t)^{-2}$ oneigenlijk Riemann-integreerbaar is op $[0,\infty[$ en bewijs dat $\int_0^\infty h(t)\, dt = 1$.

3 pt (b) Toon aan dat door

$$f(x) := \int_0^\infty \frac{1}{(1+tx^2)(1+t)^3}\, dt$$

een continue functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd wordt.

4 pt (c) Toon aan dat de functie f differentieerbaar is, en dat $|f'(x)| \leq 2|x|$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

ZOZ

Opgave 3 We beschouwen de rij functies $f_n : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f_n(x) = \frac{e^{nx}}{xe^{nx} + 1}, \qquad (x \geq 0),$$

voor $n \geq 0$.

2 pt (a) Toon aan dat de rij $(f_n)_{n \geq 0}$ puntsgewijs convergeert op $]0, \infty[$ met als limiet de functie $x \mapsto 1/x$.

2 pt (b) Toon aan dat de rij $(f_n)_{n \geq 0}$ puntsgewijs convergeert op $[0, \infty[$, en bepaal de puntsgewijze limietfunctie $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$.

2 pt (c) Toon aan dat voor alle $x > 0$ geldt dat

$$|f_n(x) - f(x)| \leq x^{-2} e^{-nx}.$$

2 pt (d) Toon aan dat de rij $(f_n)_{n \geq 0}$ uniform convergeert op $[a, \infty[$, voor elke $a > 0$.

2 pt (e) Toon aan dat de rij $(f_n)_{n \geq 0}$ niet uniform convergeert op $[0, \infty[$.

Opgave 4 Bepaal voor elk van de volgende machtreeksen de convergentiestraal, en het middelpunt van de convergentiecirkel.

2 x 5 pt

$$\text{(a)} \quad \sum_{n \geq 0} \frac{(z-2)^{2n}}{2^n}; \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{(z+3i)^n}{n+3i}.$$

Opgave 5 Gegeven is een constante $a > 0$. We beschouwen de 2π-periodieke functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die voor $-\pi < x \leq \pi$ gedefinieerd is door $f(x) = e^{-a|x|}$. Merk op dat deze functie continu is op $\mathbb{R}$.

2 pt (a) Laat zien dat de k-de Fourier coëfficiënt van f gegeven wordt door

$$c_k = (\mathcal{F}f)_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi e^{-ax} \left[e^{ikx} + e^{-ikx} \right] dx, \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

3 pt (b) Bewijs dat dat voor iedere $k \in \mathbb{Z}$ geldt dat

$$c_k = \frac{a}{\pi} \left(\frac{1 - (-1)^k e^{-a\pi}}{a^2 + k^2} \right).$$

3 pt (c) Bewijs dat de Fourier-reeks $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \, e^{ikx}$ absoluut uniform convergent is op $\mathbb{R}$.

2 pt (d) Bewijs dat

$$a\pi + e^{-a\pi} = 1 + 2a^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^k e^{-a\pi}}{a^2 + k^2}.$$

Formuleer expliciet de stelling(en) die je daarbij gebruikt.