# Uitwerking, Herkansing Functies en Reeksen, 23 december 2014

## Opgave 1

(a) Met de gebruikelijke rekenregels zien we dat de functie $\varphi$ partieel differentieerbaar is, met partiële afgeleiden

$$D_1\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} -2u \\ 2u \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad D_2\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} 2v \\ 2v \end{pmatrix}$$

Deze partiële afgeleiden zijn continu. Hieruit volgt dat $\varphi$ totaal differentieerbaar is op $\mathbb{R}^2$, met afgeleide gegeven door

$$D\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} -2u & 2v \\ 2u & 2v \end{pmatrix}$$

(b) De functie $f$ is in het bijzonder $C^1$ dus wegens een stelling totaal differentieerbaar op $\mathbb{R}^2$. Hieruit volgt dat de samenstelling $g = f \circ \varphi$ op grond van de kettingregel totaal differentieerbaar is, met totale afgeleide gegeven door

$$Dg(u,v) = Df(\varphi(u,v))D\varphi(u,v).$$

Vermenigvuldiging van de Jacobi matrices geeft

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) &= -2u\,\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v)) + 2u\,\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v)) \\
\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) &= 2v\,\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v)) + 2v\,\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v)).
\end{aligned}$$

(c) Aangezien de partiële afgeleiden van $f$ ook $C^1$ zijn, kunnen we de in (b) gevonden formule toepassen op de partiële afgeleiden van $f$ en vinden we

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) &= 2v\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v)) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v))\right] \\
&= 2v\left[-2u\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\varphi(u,v)) - 2u\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\varphi(u,v))\right] \\
&\quad +2v\left[2u\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\varphi(u,v)) + 2u\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\varphi(u,v))\right].
\end{aligned}$$

Aangezien $f$ een $C^2$-functie is, geldt dat

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

De hierboven optredende gemengde partiële afgeleiden vallen dus tegen elkaar weg, en we vinden dat

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) = 4uv\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\varphi(u,v)) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\varphi(u,v))\right).$$

**Opgave 2**

(a) De functie $h$ is continu, dus lokaal Riemann integreerbaar op $[0, \infty[$. Voor $\beta > 0$ geldt dat

$$\int_0^\beta h(t)\ dt = \int_0^\beta (1+t)^{-2}\ dt = \left[-(1+t)^{-1}\right]_0^\beta = 1 - \frac{1}{1+\beta}.$$

Het rechterlid heeft limiet 1 voor $\beta \to \infty$. We zien dat de functie $h$ oneigenlijk Riemann integreerbaar is op $[0, \infty[$, terwijl

$$\int_0^\infty h(t)\ dt = 1.$$

(b) We beschouwen de functie $g : \mathbb{R} \times [0, \infty[ \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$g(x,t) = \frac{1}{(1+tx^2)(1+t^3)}.$$

De functie $g$ is continu op zijn domein. Bovendien geldt $x \in \mathbb{R}$ en $t \geq 0$ dat

$$|g(x,t)| \leq \frac{1}{1+t^3} \leq \frac{1}{1+t^2}.$$

Het rechterlid is oneigenlijk integreerbaar over $[0, \infty[$. Met behulp van de stelling van uniforme majorantie zien we dat de functie $f$ continu is op $\mathbb{R}$.

(c) De in (b) geïntroduceerde functie $g$ is partieel differentieerbaar naar zijn eerste variabele, met partiële afgeleide gegeven door

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -\frac{2xt}{(1+tx^2)^2(1+t)^3}.$$

Deze partiële afgeleide functie is continu op $\mathbb{R} \times [0, \infty[$, terwijl voor alle $x \in \mathbb{R}$ en $t \geq 0$ geldt dat

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq 2|x| \frac{t}{(1+t)^3} \leq 2|x| h(t).$$

Zij $R > 0$. Dan volgt met behulp van de stelling over differentiëren onder het integraalteken dat $f$ differentieerbaar is op het interval $[-R, R]$, terwijl voor alle $x \in [-R, R]$ geldt

$$|f'(x)| = \left|\int_0^\infty \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\ dt\right| \leq \int_0^\infty \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right|\ dt \leq 2|x| \int_0^\infty h(t)\ dt = 2|x|.$$

Aangezien dit geldt voor elke $R > 0$ volgt het gestelde.

**Opgave 3**

(a) Zij $x > 0$. Dan geldt $-nx \to -\infty$ voor $n \to \infty$, dus $e^{-nx} \to 0$. Hieruit volgt dat

$$f_n(x) = \frac{1}{x + e^{-nx}} \to \frac{1}{x+0} = \frac{1}{x}, \qquad (n \to \infty).$$

(b) We merken op dat $f_n(0) = 1$ voor alle $n$, dus $f_n(0) \to 1$ voor $n \to \infty$. Definieer de functie $f : [0, \infty[ \to \mathbb{R}$ door $f(x) = 1/x$ voor $x > 0$ en door $f(0) = 1$. Dan zien we met (a) en het voorgaande dat $f_n \to f$ puntsgewijs op $[0, \infty[$.

(c) Voor $x > 0$ geldt dat

$$f_n(x) - f(x) = \frac{e^{nx}}{xe^{nx} + 1} - \frac{1}{x} = \frac{xe^{nx} - [xe^{nx} + 1]}{x^2 e^{nx} + x} = \frac{-1}{x^2 e^{nx} + x},$$

dus

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{x^2 e^{nx} + x} < \frac{1}{x^2 e^{nx}} = x^{-2} e^{-nx}.$$

(d) Voor $x \geq a$ en $n \geq 0$ geldt dat $x^{-2} \leq a^{-2}$ en $e^{-nx} \leq e^{-na}$, dus

$$|f_n(x) - f(x)| \leq a^{-2} e^{-na}.$$

Hieruit volgt dat

$$\|f_n - f\|_{[a,\infty[} \leq a^{-2} e^{-na} \to 0, \qquad (n \to \infty).$$

We concluderen dat $f_n \to f$ uniform op $[a, \infty[$.

(e) Veronderstel dat de rij $(f_n)$ uniform convergeert op $[0, \infty[$. Dan moet de uniforme limiet gelijk zijn aan de functie $f$. Elk der functies $f_n$ is continu, dus wegens een stelling zou $f$ continu op $[0, \infty[$ moeten zijn. Wegens (a) is $f$ niet begrensd op $]0, 1]$, dus dit kan niet het geval zijn. De rij $(f_n)$ convergeert derhalve niet uniform op het interval $[0, \infty[$.

**Opgave 4**

(a) De machtreeks is in machten van $(z - 2)$. Het middelpunt van de convergentiecirkel is dus $2 = (2, 0)$. Substitueren we $w = 2^{-1}(z - 2)^2$, dan krijgen we de meetkundige reeks, met convergentiestraal 1. De gegeven machtreeks heeft dus convergentiecirkel gegeven door $|2^{-1}(z - 2)^2| = 1$, dus door $|z - 2|^2 = 2$, ofwel $|z - 2| = \sqrt{2}$. De convergentiestraal van de machtreeks is dus $\sqrt{2}$.

(b) De machtreeks is in machten van $(z - (-3i))$, dus het middelpunt van de convergentiecirkel is $-3i = (0, -3)$. Er geldt dat

$$\frac{|n + 1 + 3i|^{-1}}{|n + 3i|^{-1}} = \frac{|1 + 3in^{-1}|}{|1 + n^{-1} + 3in^{-1}|} \to \frac{1}{1} = 1.$$

Met het limietkenmerk zien we nu dat de convergentiestraal van de machtreeks gelijk is aan $1/1 = 1$.

**Opgave 5**

(a) De coëfficiënt van de Fourier reeks wordt gegeven door

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} e^{ax}e^{-ikx}\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} e^{-ax}e^{-ikx}\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} e^{-ax}e^{ikx}\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} e^{-ax}e^{-ikx}\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} e^{-ax}\,\left[e^{ikx}+e^{-ikx}\right]\,dx. \end{aligned}$$

(b) Door primitiveren van de in (a) gevonden integrand vinden we

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{(-a+ik)x}}{-a+ik}+\frac{e^{(-a-ik)x}}{-a-ik}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{(-1)^k e^{-a\pi}-1}{2\pi}\left[\frac{1}{-a+ik}+\frac{1}{-a-ik}\right] \\ &= \frac{1-(-1)^k e^{-a\pi}}{2\pi}\frac{2a}{a^2+k^2}. \end{aligned}$$

Hieruit volgt de gevraagde formule direkt.

(c) Er geldt dat $0 < e^{-a\pi} < 1$. Hieruit volgt dat $|1-(-1)^k e^{-a\pi}| < 2$. We concluderen dat

$$|c_k| \leq \frac{2a}{\pi}\frac{1}{a^2+k^2} \leq \frac{2a}{\pi}\,k^{-2}, \qquad (k \neq 0).$$

De reeks $\sum_{k>0} k^{-2}$ is convergent. Met het majorantiekenmerk volgt nu dat de reeks $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|$ convergent is. Hieruit volgt dat de Fourierreeks absoluut uniform convergent (zie resultaat diktaat).

(d) De functie $f$ is continu en heeft een absoluut uniforme Fourierreeks. Hij wordt wegens een stelling dus gegeven door zijn Fourierreeks. In het bijzonder geldt voor $x = 0$ dat

$$\begin{aligned} 1 = f(0) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}|_{x=0} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k = c_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} c_k \\ &= \frac{(1-e^{-\pi a})}{a\pi} + \frac{2a}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k e^{-a\pi}}{a^2+k^2}. \end{aligned}$$

Door vermenigvuldiging met $a\pi$ en daarna in beide leden optellen van $e^{-a\pi}$ verkrijgen we hieruit de gewenste identiteit.