Herkansing Functies en Reeksen

15 maart 2012, 9.00 - 12.00 uur

- Schrijf op ieder vel **je naam**, en bovendien op het eerste vel je **studentnummer**, de naam van je **practicumleider** (Jan Jitse Venselaar, Wouter Stekelenburg) en het **aantal ingeleverde vellen**.
- Geef niet alleen antwoorden; laat ook zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent.
- **N.B.** Als je een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- **N.B.** Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, **ga dan toch door met de volgende onderdelen.** Je mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- Rekenmachine, diktaat en aantekeningen mogen niet worden gebruikt.
- Alle **4** opgaven tellen even zwaar.

Succes !

Opgave 1 We beschouwen de functies $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ en $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gedefinieerd door

$$f(u, v) = (u^3 - v, uv, 2), \quad \text{en} \quad g(x, y) = (x^2 - y^4 + 2, 2xy + 1).$$

(a) Bewijs dat g (totaal) differentieerbaar is op $\mathbb{R}^2$.

(b) Bewijs dat de totale afgeleide van g in $(0, 1)$ gegeven wordt door

$$Dg(0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Toon aan dat de functie $f \circ g$ differentieerbaar is in $(0, 1)$ en bepaal $D(f \circ g)(0, 1)$.

Uitwerking:

(a) De partiële afgeleiden van g worden gegeven door:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = (2x, 2y)^{\mathrm{T}}, \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = (-4y^3, 2x)^{\mathrm{T}}.$$

De partiële afgeleiden zijn componentsgewijs veeltermen dus continu, dus g is overal op $\mathbb{R}^2$ totaal differentieerbaar.

(b) De totale afgeleide van g in $(0, 1)$ wordt gegeven door

$$Dg(0, 1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(0, 1) & \frac{\partial g}{\partial y}(0, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) De functie f heeft partiële afgeleiden die continu zijn. Derhalve is f overal op $\mathbb{R}^2$ totaal differentieerbaar. Wegens de kettingregel is de samengestelde functie $f \circ g$ differentieerbaar in $(0, 1)$, met afgeleide gegeven door

$$D(f \circ g)(0,1) = Df(g(0,1))Dg(0,1) = Df(1,1)Dg(0,1).$$

Er geldt dat

$$Df(1,1) = \left.\begin{pmatrix} 3u^2 & -1 \\ v & u \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right|_{(u,v)=(1,1)} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

We concluderen dat

$$D(f \circ g)(0,1) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -12 \\ 2 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Opgave 2

(a) Toon aan dat door
$$f(t) := \int_0^\infty e^{-tx}(2 - \sin x)\, dx$$
een functie $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ wordt gedefinieerd.

(b) Toon aan dat f continu is op $[1, \infty[$.

(c) Toon aan dat f continu is op $]0, \infty[$.

(d) Toon aan dat voor iedere $R > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zo dat
$$0 < t < \delta \Rightarrow f(t) \geq R.$$

Uitwerking

(a) Voor elke $t > 0$ geldt dat de functie $\varphi_t : x \mapsto e^{-tx}(2 - \sin x)$ continu is op $[0, \infty[$, dus lokaal Riemann integreerbaar. Bovendien geldt voor alle $x \geq 0$ dat

$$|\varphi_t(x)| \leq 3e^{-tx}.$$

De functie $x \mapsto e^{-tx}$ is oneigenlijk Riemann-integreerbaar op $[0, \infty[$. Wegens de majorantiestelling is de functie φ_t absoluut integreerbaar op $[0, \infty[$.

(b) Voor alle $t \geq 1$ geldt dat $|\varphi_t(x)| \leq 3e^{-tx} \leq 3e^{-x}$ voor $x \geq 0$. De functie $x \mapsto e^{-x}$ is absoluut integreerbaar op $[0, \infty[$. Aangezien $(t, x) \mapsto \varphi_t(x)$ continu is op $[1, \infty[\times [0, \infty[$, volgt uit een stelling dat de functie f continu is op $[0, \infty[$.

(c) Zij $a > 0$. Dan geldt voor alle $t \geq a$ dat $|\varphi_t(x)| \leq 3e^{-tx} \leq 3e^{-ax}$ voor $x \geq 0$. De functie $x \mapsto e^{-ax}$ is absoluut integreerbaar op $[0, \infty[$. Aangezien $(t, x) \mapsto \varphi_t(x)$ continu is op $[a, \infty[\times[0, \infty[$, volgt uit een stelling dat de functie f continu is op $[0, \infty[$.

Dit geldt voor alle $a > 0$ dus f is continu op $]0, \infty[$.

(d) Voor alle $t > 0$ en $x \geq 0$ volgt dat $\varphi_t(x) \geq 2e^{-tx} \geq 0$, dus

$$f(t) \geq \int_0^\infty 2e^{-tx}\, dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R 2e^{-tx}\, dx = \frac{2}{t}.$$

Zij $R > 0$. Kies $\delta = R/2$. Dan geldt voor alle $0 < t < \delta$ dat

$$f(t) \geq \frac{2}{t} \geq \frac{2}{\delta} = R.$$

Opgave 3 Bepaal de convergentiestralen van de volgende machtreeksen:

$$\text{(a)} \quad \sum_{n\geq 0} \frac{(n-i)}{2} z^n; \quad \text{(b)} \quad \sum_{n\geq 0} \frac{(z-i)^n}{2^n+1}; \quad \text{(c)} \quad \sum_{n\geq 3} \frac{z^{2n+1}}{(n-1)(n-2)}.$$

(d) Bepaal alle $z \in \mathbb{C}$ waarvoor de volgende machtreeks convergeert:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n^3}{n^2+1} z^n.$$

Uitwerking

(a) Schrijf $c_n = \frac{1}{2}(n-i)$. Dan geldt voor alle $n \geq 0$ dat

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \left|\frac{n+1-i}{n-i}\right| = \left|\frac{1+(1-i)/n}{1-i/n}\right|$$

De laatste uitdrukking heeft limiet $L = 1$ voor $n \to \infty$. De machtreeks heeft derhalve convergentiestraal $1/L = 1$.

(b) Schrijf nu $c_n = (2^n + 1)^{-1}$. Dan geldt dat

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \left|\frac{2^n+1}{2^{n+1}+1}\right| = \left|\frac{1+2^{-n}}{2+2^{-n}}\right|.$$

Deze uitdrukking heeft limiet $L = 1/2$. De convergentiestraal is derhalve $1/L = 2$.

(c) We beschouwen de machtreeks

$$\sum_{n\geq 3} \frac{w^n}{(n-1)(n-2)}.$$

Met een soortgelijke methode als in (a) zien we dat deze machtreeks convergentiestraal 1 heeft. De reeks convergeert dus voor $|w| < 1$ en divergeert voor $|w| > 1$. De gegeven machtreeks ontstaat uit de machtreeks in w door substitutie van $w = z^2$, en daarna vermenigvuldiging met z. De machtreeks in z convergeert daarom voor $|z| < 1$ terwijl hij divergeert voor $|z| > 1$. De gegeven machtreeks heeft daarom convergentiestraal 1.

(d) Schrijf $c_n = \frac{n^3}{n^2+1}$. Dan geldt dat $|c_{n+1}/c_n| \to L = 1$. De machtreeks heeft dus convergentiestraal $R = 1/L = 1$. Voor $|z| < 1$ convergeert de reeks dus, en voor $|z| > 1$ divergeert hij. Als $|z| = 1$, dan geldt voor alle $n \geq 1$ dat

$$|c_n z^n| = \frac{n^3}{n^2+1} \geq \frac{n^3}{2n^2} \geq n/2 \geq 1/2.$$

De term $c_n z^n$ heeft dus niet limiet 0 voor $n \to \infty$. Hieruit volgt dat de gegeven machtreeks divergeert voor $|z| = 1$.

Opgave 4 We noteren de ruimte van continue 2π-periodieke functies $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ met $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Een functie $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ heet even indien $f(x) = f(-x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. In het vervolg veronderstellen we dat $g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

(a) Bewijs dat g even is dan en slechts dan als $\mathcal{F}(g)_k = \mathcal{F}(g)_{-k}$ voor alle $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Toon aan: als g even is en stuksgewijs C^1, dan geldt voor alle $x \in \mathbb{R}$ dat

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx,$$

waarin

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\, dx, \qquad a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\, \cos kx\, dx \quad (k \geq 1).$$

(c) Bepaal expliciet getallen $\alpha_k \in \mathbb{C}$ ($k \geq 0$) zo dat voor alle $0 \leq x \leq \pi$ geldt

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cos kx. \qquad (*)$$

(d) Toon aan dat de identiteit (*) voor geen enkele $-\pi \leq x < 0$ geldt.

Uitwerking

(a) Definieer de functie $h(x) = g(-x)$. Dan is $h \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

Voor elke $k \in \mathbb{Z}$ geldt dat

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(g)_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-ikx}\,dx &= -\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{-\pi} g(-x)e^{ikx}\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)e^{ikx}\,dx = \mathcal{F}(h)_{-k}.\end{aligned}$$

Is g even, dan is $h = g$, dus $\mathcal{F}(g)_k = \mathcal{F}(g)_{-k}$ voor alle k.

Veronderstel omgekeerd dat $\mathcal{F}(g)_k = \mathcal{F}(g)_{-k}$ voor alle k. Dan is $\mathcal{F}(h)_k = \mathcal{F}(g)_k$ voor alle k, dus $\mathcal{F}(g-h) = 0$. Volgens een stelling in het dictaat is $\mathcal{F}$ injectief op $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, dus $g - h = 0$. Hieruit volgt dat g even is.

(b) Veronderstel dat g even is en stuksgewijs C^1. Omdat g continu is geldt voor alle $x \in \mathbb{R}$ dat

$$\begin{aligned}g(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}\mathcal{F}(g)_k e^{ikx} &= \mathcal{F}(g)_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\mathcal{F}(g)_k(e^{ikx}+e^{-ikx}) \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx\end{aligned}$$

met

$$a_0 = \mathcal{F}(g)_0 = 2\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} g(x)\,dx.$$

Aangezien de functie $x \mapsto g(x)\cos kx$ even is, geldt voor $k \geq 1$ dat

$$a_k = 2\mathcal{F}(g)_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\cos kx\,dx.$$

(c) We beschouwen de 2π-periodieke functie g die op $]-\pi,\pi]$ gegeven wordt door $g(x) = |x|$. Dan is g continu en stuksgewijs C^1 en even. Uit (c) volgt nu het bestaan van $\alpha_k \in \mathbb{C}$ zo dat

$$x = g(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k \cos kx.$$

We berekenen de coëfficiënten:

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{\pi}{2}$$

en

$$\alpha_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos kx\,dx = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin kx}{k}\,dx = \frac{2}{k^2\pi}\cos kx\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{k^2\pi}((-1)^k - 1).$$

Dus $\alpha_k = 0$ voor $k \geq 2$ even, en $\alpha_k = -\frac{4}{k^2\pi}$ voor $k \geq 1$ oneven.

(d) Stel dat $-\pi \leq x < 0$ en dat (*) geldt voor deze x. Dan is

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cos kx = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cos(-kx)$$

omdat cos een even functie is. Omdat $0 < -x \leq \pi$ volgt wegens (*) dat

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cos(-kx) = -x,$$

dus $x = -x$. Dit impliceert dat $x = 0$, tegenspraak.

Richtlijn voor de normering

Opgave 1

(a): 2
(b): 3
(c): 5
2 voor juiste formule kettingregel
2 voor juiste formule $Df(g(1,1))$
1 voor laatste berekening

Opgave 2

(a): 2
(b): 2
(c): 3
(d): 3
1 voor de convergentiestraal
2 voor de rest

Opgave 3

(a): 2
(b): 2
(c): 3
1 voor de opmerking dat het volstaat de continuiteit op $[a, \infty[$ aan te tonen voor alle $a > 0$.
2 voor de juiste toepassing van majorantie
(d): 3
1 voor het idee dat φ_t naar onderen geschat kan worden
2 voor de verdere argumentatie

Opgave 4

(a): 2
1 voor de implicatie vanaf g even
1 voor de implicatie richting g even
(b): 4
1 voor de limietformule met de e-machten
1 voor de omwerking naar cos reeks
1 +1 voor het geven van de juiste formules voor a_k
(c): 3
1 voor het uitbreiden van x naar een geschikte g
2 voor het uitrekenen van de α_k
(d): 1