MATHEMATISCH INSTITUUT, FACULTEIT WISKUNDE EN INFORMATICA, UU.
IN ELEKTRONISCHE VORM BESCHIKBAAR GEMAAKT DOOR DE $\mathcal{TBC}$ VAN A−ESKWADRAAT.
HET COLLEGE WISB211 WERD IN 2004/2005 GEGEVEN DOOR ODO DIEKMANN.

Functies en Reeksen (WISB211)
1 februari 2005

Opgave 1

a) Bepaal de convergentiestraal van de machtreeks $\sum_{k=0}^{\infty}(-2)^k z^k$

b) Zij $I = [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$. Definieer $f : I \to \mathbf{C}$ door

$$f(x) := \frac{1}{1+2x} - \sum_{k=0}^{\infty}(-2)^k x^k$$

Toon aan dat er een open omgeving U van I in $\mathbf{C}$ is en een comlex analytische functie $g : U \to \mathbf{C}$ waarvoor $g|_I = f$.
Welke waarden neemt g aan?

c) Bepaal de convergentiestraal van de Taylorreeks van de functie $z \mapsto \dfrac{1}{1+2z}$ in het punt $z = \frac{1}{4}$.

Opgave 2

a) Zij $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ een rij van continue functies die uniform op $[0,1]$ convergeert naar $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Bewijs dat

$$\lim_{n\to\infty} f_n(1/n) = f(0)$$

b) Zij $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$g_n(x) := \frac{1}{2}n^2 x \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}n^2x^2}$$

Toon aan dat voor iedere $x \in [0,1]$ geldt $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0$.

c) Convergeert g_n uniform op $[0,1]$ naar de nulfunctie?

Opgave 3

Zij f de 2π-periodieke functie op $\mathbf{R}$ waarvoor

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2} & x = \frac{\pi}{2}\ ,\ \pm\pi \\ 0 & -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \text{ of } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

a) Bereken de complexe Fourier-coëfficiënten c_k van f.

b) Bereken de reële Fourier-coëfficiënten a_0, en a_k, b_k voor $k \geq 1$.

c) Voor welke waarden van x convergeert de Fourierreeks naar $f(x)$?

d) Op welke intervallen is de convergentie uniform?

e) *(bonusopgave)*

Denk je dat de Fourierreeks naar f convergeert met betrekking tot de kwadraatintegraalnorm? Durf je ook iets te zeggen over de ongelijkheid van Bessel, de identiteit van Parseval en een schatting voor $||f - \sum_{k=-l}^{l} c_k \epsilon_k||^2$ voor $\epsilon_k(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ en waarbij de norm de kwadraatintegraalnorm is?