Proeftentamen Functies en Reeksen **4 november 2019, 13:30-16:30**

- Schrijf op ieder vel **je naam** en bovendien op het eerste vel je **studentnummer**, de naam van je **practicumleider** (Dusan Joksimovic, Dominik Engl, Christiaan van den Brink) en het **aantal ingeleverde vellen.**
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent.
- **N.B.** Als je een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- **N.B.** Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, **ga dan toch door met de volgende onderdelen.** Je mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- Rekenmachine, diktaat en aantekeningen mogen niet worden gebruikt.
- De te behalen punten worden overal in de kantlijn aangegeven. Het totaal aantal te behalen punten is 50. Het cijfer voor dit tentamen is het aantal behaalde punten gedeeld door 5, afgerond op 1 decimaal nauwkeurig.

Succes !

10 pt totaal **Opgave 1** We beschouwen een functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^p$ waarvan de partiële afgeleiden $D_1 f$ en $D_2 f$ bestaan en continu zijn.

5 pt (a) Toon aan dat de functie $t \mapsto f(t,t), \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ differentieerbaar is met afgeleide gegeven door

$$\frac{d}{dt} f(t,t) = Df(t,t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5 pt (b) Toon aan dat voor iedere $t_0 \in \mathbb{R}$ geldt dat

$$\left. \frac{d}{dt} f(t,t) \right|_{t=t_0} = \left. \frac{d}{dt} f(t,t_0) \right|_{t=t_0} + \left. \frac{d}{dt} f(t_0,t) \right|_{t=t_0}$$

10 pt totaal **Opgave 2**

5 pt (a) Toon aan dat door

$$F(y) = \int_0^\infty \cos(xy)\, e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx$$

een continu differentieerbare functie $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wordt gedefinieerd, met afgeleide

$$F'(y) = -\int_0^\infty x \sin(xy)\, e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx.$$

5 pt (b) Toon aan dat voor alle $y \in \mathbb{R}$ geldt $F'(y) = -yF(y)$.

ZOZ

10 pt totaal **Opgave 3** In deze opgave mag u gebruiken dat

$$\log(1+x) = x + R(x), \quad \text{met } |R(x)| \leq x^2 \text{ voor alle } \quad x \in [0,1].$$

3 pt (a) Toon aan dat de rij functies $f_n : [0,\infty[\to \mathbb{R}$, gedefinieerd door

$$f_n(x) = n\log(1+\frac{x}{n})$$

puntsgewijs convergent is op $[0,\infty[$ en bepaal de puntsgewijze limiet $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$.

4 pt (b) Toon aan dat de rij (f_n) uniform convergent is op $[0,a]$, voor iedere $a > 0$.

3 pt (c) Toon aan de rij (f_n) niet uniform convergent is op het interval $[0,\infty[$.

10 pt totaal **Opgave 4** We beschouwen de machtreeks

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{2^{k+1}(2k+1)^2}.$$

4 pt (a) Toon aan dat de machtreeks een continue functie op de gesloten schijf $\bar{D}(0;\sqrt{2})$ definieert.

3 pt (b) Laat zien dat de machtreeks divergeert voor $z = i\sqrt{2}t$, $t > 1$.

3 pt (c) Bepaal de convergentiestraal van de machtreeks.

10 pt totaal **Opgave 5** We beschouwen de 2π-periodieke functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die op $[-\pi,\pi]$ gedefinieerd is door

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - |x|.$$

2 pt (a) Beargumenteer dat de Fourier-reeks van f absoluut uniform convergent is.

5 pt (b) Bepaal de Fourier-coëfficiënten $c_k = \mathcal{F}(f)_k$ voor alle $k \in \mathbb{Z}$.

3 pt (d) Bewijs dat

$$\frac{\pi^4}{96} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$