Mathematisch Instituut, Faculteit Wiskunde en Informatica, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A−Eskwadraat.
Het college WISB211 werd in 2004/2005 gegeven door Odo Diekmann.

Functies en Reeksen, hertentamen (WISB211)
23 maart 2005

N.B.: U mag in ieder onderdeel de conclusies van voorgaande onderdelen gebruiken, ook als u die (nog) niet bewezen hebt. Motiveer steeds uw antwoord door duidelijk aan te geven welke argumenten en welke resultaten uit de syllabus u gebruikt om een bepaalde conclusie te trekken. Degenen die voor het tweede deeltentamen van 1 februari 2005 een 6 of hoger hebben gehaald kunnen, als ze dat willen, volstaan met het maken van de vraagstukken 1 en 2.

Opgave 1

Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{voor } (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 & \text{voor } (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$$

a) Beargumenteer dat f totaal differentieerbaar is in ieder punt $(x_1, x_2) \neq (0,0)$.

b) Laat zien dat f in $(0,0)$ partieel differentieerbaar is naar zowel x_1 als x_2.

c) Geef de gradiënt van f in $(0,0)$.

d) Zij $v = (v_1, v_2)$ met $v_1^2 + v_2^2 = 1$. Laat zien dat de richtingsafgeleide van f in de richting van v in $(0,0)$ gegeven wordt door $v_1^2 v_2$.

e) Beargumenteer dat f niet totaal differentieerbaar is in $(0,0)$.

Definieer $I : [-1,1] \to \mathbb{R}$ door

$$I(y) = \int_1^2 f(y,t) \quad \mathrm{d}t$$

f) Is I continu?

g) Bereken $I(0)$.

h) Is I differentieerbaar?

i) Toon aan dat $I'(0) = 0$.

Opgave 2

Zij $\omega = g_1(x,y) \ \ \mathrm{d}x + g_2(x,y) \ \ \mathrm{d}y$ gedefinieerd op $U = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, met

$$g_1(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad , \quad g_2(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

a) Toon aan dat ω gesloten is.

b) Beargumenteer dat $\int_\gamma \omega = 0$ als γ een gesloten C^1 kromme is die de oorsprong *niet* omsluit.

c) Toon via een expliciete berekening aan dat $\int_\gamma \omega = 0$, waarbij nu $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ voor $0 \leq t \leq 2\pi$.

d) Toon aan dat $\int_\gamma \omega = 0$ voor elke gesloten C^1 kromme γ die de oorsprong omsluit.
Hint: gebruik poolcoördinaten (maar leg uit waarom dat mag!)

e) Is ω exact?

f) Vind een $f : U \to \mathbb{R}$ zó dat

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = g_1(x, y) \quad \text{en} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = g_2(x, y)$$

Opgave 3

a) Zij voor $n \geq 1$ de functie $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ continu. Veronderstel dat f_n voor $n \to \infty$ *uniform* op $[0, \infty)$ convergeert naar een functie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$. Neem bovendien aan dat voor alle $n \geq 1$ geldt

$$\lim_{x \to \infty} f_n(x) = 0$$

Toon aan dat noodzakelijkerwijs $\lim_{x \to \infty} f(x)$ bestaat en gelijk is aan nul.

b) Zij nu $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ expliciet gegeven door

$$f_n(x) = \frac{n}{n + x}$$

Bepaal

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

en ga na of de convergentie al dan niet uniform is op $[0, \infty)$.

c) Zij $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ ditmaal gegeven door

$$f_n(x) = \frac{n}{n^2 + x}.$$

Bepaal

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

en ga na of de convergentie al dan niet uniform is op $[0, \infty)$.